SPM

contacto

FOLHA INFORMATIVA DA DELEGAÇÃO REGIONAL DO CENTRO DA SOCIEDADE PORTUGUESA DE MATEMÁTICA

nº 8 setembro 1982

OBSERVAÇÕES SOBRE UMA EQUAÇÃO DIFERENCIAL

por

A.S. Alves

(Professor no Dep.de Matemática da F.C.T.U.C.)

Consideremos a equação diferencial (de variáveis separáveis)

(a) $$\frac{dy}{dx} = y$$

sobre a qual faremos observações elementares.

Uma solução de (a) é uma função real de variável real $y = \emptyset(x)$, definida num intervalo $]a,b[$ tal que

$$\frac{d\emptyset(x)}{dx} \equiv \emptyset(x) \quad , \quad x \in]a,b[\ ,$$

isto é, será uma função idêntica à sua própria derivada.

A pesquisa da solução pode fazer-se percorrendo os passos que indicamos a seguir, sem qualquer comentário,

(a) $$\frac{dy}{dx} = y$$

(b) $$\frac{1}{y}\,dy = dx$$

(c) $$\int \frac{1}{y}\,dy = \int dx$$

(d) $$\log |y| = x + K$$

(e) $$|y| = e^{x+K} = C\,e^{x} \quad , \quad C = e^{K}$$

Destes passos, alguns estão bem fundamentados em teoria previamente estudada, outros estão -no menos, na medida em que pressupõem certos resultados. O fundamental desta questão assenta no seguinte teorema geral:

Teorema - Seja dada uma equação diferencial

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y)$$

em que f está definida num domínio aberto de $\mathbb{R}^2$ e satisfaz às hipóteses

(i) é contínua;

(ii) é lipchitziana em y, isto é,

$$|f(x,y) - f(x_1,y_1)| \leq \alpha\ |y - y_1|$$

sendo α independente de x.

Então, fixado $(x_o,y_o) \in D$, existe um $h > 0$ e uma única função $\emptyset(x)$ tal que

$$\frac{d\,\emptyset(x)}{dx} \equiv f(x,\emptyset(x)) \quad , \quad x \in]\,x_o-h,\ x_o+h[$$

$$\emptyset(x_o) = y_o.$$

A esta função chama-se **solução** da equação diferencial de **valores iniciais** (x_o,y_o).

Este teorema aplica-se perfeitamente à equação (a). Neste caso,

$$D = \mathbb{R}^2 \qquad e \qquad f(x,y) = y.$$

O teorema legitima os passos (a) a (e), embora sejam necessárias algumas observações complementares, como veremos.

Portanto, procuremos uma solução $\emptyset(x)$, com $\emptyset(x_o) = y_o$. Vamos refazer, justificando, os passos (a) a (e).

(a) → (b). O Teorema diz-nos que existe essa solução $\emptyset(x)$ e é **única**. Logo, da igualdade

$$\frac{d\emptyset(x)}{dx} = \emptyset(x)$$

podemos passar, por divisão, a

$$\frac{1}{\emptyset(x)}\ \frac{d\emptyset(x)}{dx} = 1 \text{ ou, formalmente, } \frac{1}{y}\,dy = dx.$$

(b) → (c). Primitivando,

$$\int \frac{\frac{d\emptyset(x)}{dx}}{\emptyset(x)}\,dx = \int dx.$$

(c) → (d). Podemos escrever

$$\log |\emptyset(x)| = x + K.$$

(d) → (e). Ficará

$$|\emptyset(x)| = e^{K}\,e^{x}.$$

Então, teremos

$$\emptyset(x) = \pm\ C\ e^{x} \quad , \quad C > 0$$

O sinal do 2º membro e o valor de C serão determinados pelos valores iniciais. De facto

$$\log |y_o| = \log |\emptyset\ (x_o)| = x_o + K$$

logo

$$K = \log |y_o| - x_o.$$

e

$$C = \exp\left[\log |y_o| - x_o\right].$$

Quanto ao sinal, depende do sinal de y_o. De facto, se $y_o > 0$,

$$\emptyset(x_o) = y_o = +\ C\ e^{x_o} > 0$$

e, analogamente, se $y_o < 0$. Se $y_o = 0$ será $C = 0$. E, se todos os anteriores passos são válidos, chegamos à conclusão de que qualquer solução de (a) ou é nula, ou é > 0 ou < 0.

Justamente, há uma crítica a fazer na passagem de (a) para (b). De facto, esta passagem só pode fazer-se se $\emptyset(x) \neq 0$ para todo o valor de x. Ora, poderemos ter a garantia de se verificar esta condição mesmo desconhecendo o valor da so-

(continua na pág.6)

Antologia

SERÁ QUE SE PODE TORNAR A MATEMÁTICA INTELIGÍVEL?

Porque é que nós, matemáticos, temos tanta dificuldade em nos fazer entender? Muitas pessoas têm uma opinião negativa sobre a matemática e culpam disso, com razão ou sem ela, os seus professores. Os estudantes queixam-se de que não conseguem compreender os seus livros; têm feito isso desde o tempo em que eu era estudante e presumivelmente desde muito antes disso. Profissionais de outras disciplinas sentem-se obrigados a escrever as suas próprias versões das partes da matemática com as quais tiveram problemas. No entanto, foi só a partir do momento em que passei a ser editor do *American Mathematical Monthly* que me apercebi bem de como é difícil para os matemáticos escrever de modo a serem compreendidos mesmo por outros matemáticos (exceptuando co-especialistas). O número de manuscritos rejeitados, não por deficiências matemáticas mas por completa falta de inteligibilidade, tem sido chocante. Um dos meus predecessores teve uma experiência semelhante há 35 anos.

Para pôr a questão de outra maneira, porque é que nós falamos e escrevemos sobre matemática de uma forma que interfere tão dramaticamente com o que aparentemente desejamos levar a cabo? Oxalá eu soubesse. No entanto, posso pelo menos apontar alguns princípios que são frequentemente violados por professores e autores. Talvez eles sejam violados porque contradizem o que muitos dos meus contemporâneos parecem considerar verdades evidentes. (Também têm pouco em comum com o relatório da *Mathematical Association of America* sobre como ensinar matemática).

Definições abstractas. Suponhamos que você quer ensinar o conceito de "gato" a uma criancinha. Vai explicar-lhe que um gato é um mamífero relativamente pequeno, primariamente carnívoro, com garras retrácteis, uma emissão sonora característica, etc.? Aposto que não. Provavelmente, você mostra à criança muitos gatos diferentes, dizendo "gatinho" de cada vez, até que ela fique com uma ideia. Para falar mais geralmente, as generalizações fazem-se melhor por abstracção a partir da experiência. E deve vir uma de cada vez; demasiadas ao mesmo tempo sobrecarregam os circuitos. (...)

No entanto, a menos que você tenha muita sorte, a maior parte das pessoas na sua audiência não são matemáticos profissionais, não têm intenção de vir a ser matemáticos profissionais, e nunca serão matemáticos profissionais. Para começar, elas não percebem nada que comece com uma definição abstracta (muito menos com uma dúzia de seguida), porque ainda não têm nada de que abstrair. Por favor não comecem já a escrever-me cartas indignadas a explicar-me como a abstracção e a generalização são importantes para o desenvolvimento da matemática: eu *sei* isso. Mas também tenho a certeza de que quando Banach escreveu os axiomas de espaço de Banach tinha na cabeça uma quantidade de espaços particulares como modelos. Além disso, estou a falar só da comunicação da matemática, não da sua criação.

Por exemplo, se você for explicar a uma turma média como é que se determina a distância de um ponto a um plano, devia começar por determinar a distância de (2, -3, 1) a $x - 2y - 4z + 7 = 0$. Depois disso, o processo geral é quase óbvio. Os livros costumavam ser escritos assim. É um bom princípio geral que, se você fez a sua exposição duas vezes mais concreta do que pensava fazê-la, a fez 50% tão concreta como devia.

Lembre-se de que *você* se dá com matemáticos há anos e anos. Nesta altura se calhar não só pensa como um matemático mas imagina que toda a gente pensa como os matemáticos. Qualquer não-matemático pode dizer-lhe que não é assim.

Analogia. Algumas vezes a sua audiência compreenderá melhor um conceito novo se você explicar que ele é semelhante a um conceito mais familiar. Outras vezes este expediente é um fiasco. Depende da compreensão que a audiência tem da coisa análoga. Um integral é o limite de uma soma; logo, como as somas são mais simples (não há passagens ao limite!), os estudantes vão compreender melhor como é que os integrais se comportam por analogia com o comportamento das somas. Não vão? Na prática, parece que não. Os integrais são mais simples que as somas para muita gente, e é capaz de haver alguma razão profunda para isso.

Vocabulário. Nunca introduza terminologia escusadamente. Se vai ter que mencionar uma intersecção numerável de conjuntos abertos — só uma vez! — não há justificação para definir G_δ's e F_σ's.

Já me disseram que ninguém consegue realmente entender sistemas de equações lineares sem toda a terminologia especial da álgebra linear moderna. Se você acredita nisso deve ter-se esquecido de que as pessoas compreendiam bastante bem sistemas de equações lineares muitos anos antes da terminologia moderna ter sido inventada. A terminologia permite afirmações concisas; mas a concisão não é o alfa e ómega da exposição clara. A terminologia moderna também permite dizer mais do que podia ser dito nas exposições antigas. Todavia, no início de um assunto muito do esforço do estudante tem de aplicar-se a decorar *palavras* quando podia, com mais vantagem, aplicar-se a aprender matemática. Prestar mais atenção ao vocabulário do que ao conteúdo obscurece o conteúdo. (...)

Se você pensa que consegue inventar palavras melhores do que as que actualmente se usam, sem dúvida que tem razão. No entanto, é bastante improvável que consiga que muitas pessoas, com excepção dos seus próprios alunos, aceitem a sua terminologia; e é indelicado dificultar aos seus alunos a compreensão da escrita de outrem. Um Bourbaki por século produz praticamente todos os neologismos que a comunidade matemática consegue absorver. (...)

Os autores dos livros (e os professores também) devem lembrar-se de que estão a dirigir-se aos estudantes, não aos professores. O que é uma função? O livro quer que você diga qualquer coisa como "uma regra que associa a cada número real um número real unicamente determinado", o que define com certeza uma função — mas dificilmente de uma forma que os estudantes compreendem. A afirmação de que "uma definição só é satisfatória se os estudantes a entendem" já foi feita por Poincaré em 1909, mas os professores de matemática não parecem ter-lhe prestado muita atenção.

As dificuldades de vocabulário não são exclusivas da matemática; dificuldades semelhantes são o que torna tão frustrante tentar falar com médicos ou advogados. Eles também insistem numa linguagem técnica rica porque "é muito mais rigoroso assim". Pois é, mas a terminologia refinada só é mais clara quando distinções rigorosas são absolutamente indispensáveis. É inútil insistir em distinções refinadas antes que a audiência saiba o suficiente para ver que elas são necessárias.

(continua na pág. 4)

INFORMAÇÕES DIVERSAS

Desloca-se a Portugal, após curta estadia na Jugoslávia e em Espanha (Barcelona), onde proferiu uma série de conferências, o Prof. Leon Henkin, da Univ. da Califórnia, em Berkeley. O Prof. Henkin é um eminente especialista em Lógica Matemática, conhecido mundialmente pelos seus trabalhos na Teoria dos Modelos. Estará entre nós entre 20 e 23 de Outubro de 1982, e espera-se que profira duas conferências, uma para lógicos (possivelmente sobre a Teoria das Álgebras Cilíndricas) e outra para um público matemático geral (possivelmente sobre Modelos de Indução e respectiva teoria elementar). Faltando ainda assentar alguns pormenores, pensa-se que proferirá uma conferência no dia 21 e outra no dia 22 de Outubro, nas instalações do CMAF (Av. Gama Pinto) e/ /ou na Faculdade de Ciências de Lisboa (Av. 24 de Julho, 134, 3º andar). Para mais informações, contactar o Prof. Augusto Franco de Oliveira, R. dos Arneiros, 28-3º C - 1500 LISBOA.

✵

O Prof. francês Michel Delecroix vai, depois de uma estadia de alguns anos, abandonar o Depto de Matemática da F.C.T.U.C., onde colaborou com o grupo de Estatística.

✵

No prosseguimento dos seus "**Encontros de Matemática**", o Grupo de Trabalho dos Açores da Delegação Regional do Sul e Ilhas da S.P.M. promoveu a realização de várias conferências por professores da Univ. de Coimbra que estiveram a dar aulas na Univ. dos Açores. O programa cumprido foi o seguinte:

16 de Junho - *Métodos de avaliação* (Dr. Salazar Ferro)
18 de Junho - *O ensino da Matemática no futuro* (Dr. Salazar Ferro)
2 de Julho - *Para que serve a Matemática? O exemplo da Aritmética* (Dr. Luis de Albuquerque)
5 de Julho - *A Matemática nas leis de Kepler até à atracção universal* (Dr. Artur Alves)
12 de Julho - *Teoremas fundamentais sobre funções regulares* (Dr. Simões da Silva)
20 de Julho - *O calendário* (Dr. Simões da Silva)

As sessões estiveram abertas a todos os interessados (sócios ou não da S.P.M.) e decorreram na Sala de Matemática da E.S. Antero de Quental (Ponta Delgada).

✵

Na sequência das decisões tomadas na reunião do Conselho Directivo da S.P.M. de 19 de Junho passado (ver CONTACTO nº7), pode já informar-se que o Director do Boletim da S.P.M. será o Secretário-Geral, Dr. St. Aubyn e o Director-adjunto será Paulo Abrantes. Para a Comissão Redactorial, a Delegação Regional do Norte indicou os nomes de José Cardoso Morgado Júnior, Luis Ruivo Domingos e Manuel Finisterra Araújo, e a do Centro indicou Armando Duarte da Silva Gonçalves, Graciano Neves de Oliveira, João Filipe Cortez Rodrigues Queiró e Maria Paula Martins Serra de Oliveira. Não temos conhecimento dos nomes indicados pela Delegação Regional do Sul e Ilhas.

✵

A Drª Maria Filomena Palmeira de Araújo Canova (Inst. Sup. Eng. Coimbra) obteve, em 18 de Junho passado, o diploma do 3º Ciclo em Estatística na Univ. de Paris VI. O título da sua tese foi *"Estimation d'un paramètre de translation ou de homotétie a partir de donnèes non-indépendantes et non-equidistribuées"*, e o supervisor foi o Prof. Jean Geffroy.

✵

por

Ana Isabel Rosendo (Assistente no Dep. de Matemática da FCTUC)
e
M. Rolão Candeias (Assistente convidado na Fac. Economia U.C.)

*Estando convencidos de que chamar a atenção para os erros não propaga esses mesmos erros e esperando até que os evite, resolvemos criar esta rubrica em que sob a forma de "**enigma**" se levantam questões que são vulgarmente referidas pelos alunos como "**ratoeiras**".*

No texto que se segue há afirmações incorrectas ou mesmo erradas. Quais e porquê? (ver soluções pág. 5).

1. A equação $x^2 - 4 = 0$ tem como soluções 2 e -2 porque $\sqrt{4} = \pm 2$.

2. O limite de uma soma de duas sucessões é igual à soma dos limites dessas sucessões.

3. Se uma função real de variável real tem um extremo relativo num ponto x_0 interior ao seu domínio então $f'(x_0) = 0$.

4. $y = 3 + \sqrt{x-2}$
$$\Leftrightarrow y - 3 = \sqrt{x-2}$$
$$\Leftrightarrow (y-3)^2 = x - 2$$
$$\Leftrightarrow x = y^2 - 6y + 11$$

5. A relação binária R definida no conjunto $A = \phi$ é <u>não reflexiva</u>.
A relação binária S definida em $\mathbb{R}$ do seguinte modo
$$x S y \Leftrightarrow x > y \wedge y > x, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$$
(relação vazia) é <u>reflexiva</u>.

Acaba de ser posta à venda a brochura "**Resolução de Equações em Números Inteiros**" de Graciano de Oliveira, que contém um dos cursos da Escola de Verão de 1981. O preço de capa é 100$00. Seguir-se-ão brochuras com os outros cursos.

✵

O Dep. de Matemática da Univ. de Coimbra convidou o Dr. J.P. Durruisseau (Univ. Pierre et Marie Curie - Paris) para proferir, em 24 e 27 de Setembro, duas conferências sobre "Cosmologia".

✵

A Drª Maria da Nazaré Simões Quadros Mendes Lopes (Univ. de Coimbra) obteve, em 14 de Maio passado, o diploma do 3º Ciclo em Estatística na Univ. de Paris VI. O título da sua tese foi *"Problèmes d'estimation dans les processus ponctuels chromatiques"* e o supervisor foi o Prof. Jean Geffroy.

✵

 ANTOLOGIA *(continuado da pág. 2)*

O Simbolismo é um tipo especial de terminologia. A matemática não pode passar sem ele. Muito progresso tem dependido da invenção do simbolismo apropriado. Mas não nos deixemos fascinar tanto pelos símbolos que esqueçamos aquilo que eles representam. A nossa audiência (esteja ela a ouvir ou a ler) está menos familiarizada do que nós com o simbolismo. Por isso não **é** boa ideia (para pegar num exemplo simples) dizer: "Suponhamos que f pertence a L^2" em vez de "Suponhamos que f é uma função mensurável cujo quadrado é integrável", a menos que se tenha a certeza de que a audiência já entende o simbolismo. Além disso, se você não vai de facto usar L^2 como um espaço de Hilbert, interessando-lhe apenas as propriedades dos seus elementos como funções, a estrutura do espaço é irrelevante e chamar a atenção para ela é uma forma de exibição — moderada, mas *é* exibição. Se a audiência não conhece o simbolismo, fica confundida; se o conhece, começa a perguntar-se quando é que você vai chegar ao que interessa.

O meu conselho sobre terminologia nova aplica-se ainda com mais força ao simbolismo novo. Não crie simbolismo novo, nem mude o antigo, escusadamente; admita (se necessário) que os usos variam e explique as equivalências existentes. (...)

Demonstrações. Só os matemáticos profissionais aprendem alguma coisa com demonstrações. As outras pessoas aprendem com explicações. Não tenho a certeza de que mesmo os matemáticos aprendam muita coisa com demonstrações em assuntos com os quais não estão familiarizados. Pode obter-se muito com argumentos que não correspondem a demonstrações formais. Conheci um ensinante (hesito em dizer "professor") que passou um semestre inteiro com uma demonstração do teorema integral de Cauchy sob hipóteses muito gerais. Uma colecção de casos particulares e exemplos teria sido mais convincente e teria deixado tempo para material mais variado e interessante, além de que deixaria a audiência melhor equipada para compreender, aplicar, generalizar e ensinar o teorema de Cauchy.

Não me lembro de quem foi que disse que uma camisola é o que uma criança veste quando os pais têm frio; mas uma demonstração é o que os alunos têm de ouvir quando o professor se sente inseguro em relação a um teorema. (...)

Pais experimentados apercebem-se de que quando uma criança diz "Porquê?" ela não quer necessariamente ouvir uma razão; só quer mais conversa. O mesmo princípio aplica-se quando uma turma solicita uma demonstração.

Rigor. Isto é muitas vezes confundido com generalidade ou o ser-se completo. Apesar do que os críticos provavelmente dirão, não há falta de rigor em enunciar um caso particular de um teorema em vez do caso mais geral que você conhece, ou uma condição suficiente simples em vez de uma complicada. (...)

O impulso para dizer tudo o que se sabe é um dos piores inimigos da comunicação eficaz.

Ser mais rigoroso que o necessário tem muito a ver com **pedantismo**, o que (diz o meu dicionário) é "ênfase excessiva em pormenores triviais".

Eis um exemplo. Suponhamos que os alunos estão à procura de um mínimo local de uma função diferenciável f, e acham pontos críticos em $x = 2$, $x = 5$ e em mais nenhum sítio. Suponhamos também que não querem usar (ou que se lhes disse para não usarem) a segunda derivada. Alguns livros dizem-lhes para testar $f(2+h)$ e $f(2-h)$ para todos os h pequenos. Os alunos preferem naturalmente testar $f(3)$ e $f(1)$. O professor pedante diz: "Não"; o professor honesto admite que qualquer ponto até ao próximo ponto crítico serve.

Entusiasmo. Os professores são frequentemente incitados a mostrar entusiasmo pelos seus assuntos. Já alguma vez teve de ouvir um especialista verdadeiramente entusiástico falar em público sobre qualquer coisa que você não conhecia nem queria conhecer, digamos as moedas de bronze da Poldávia no séc. XII ou "a teoria da enclítica *De*"? Então, pronto.

(...)

Conclusão. Eu costumo dar o seguinte conselho aos professores principiantes: "Pensem no que é que os vossos professores faziam que vocês detestassem — e não o façam". Este era um bom conselho até onde ia, mas não ia suficientemente longe. A resposta que eu ensaio para a pergunta do meu título é: "Sim; mas não nos deixemos guiar pela introspecção". Não se pode esperar comunicar eficazmente (seja na sala de aula seja por escrito) a menos e até que se compreenda a audiência. Esta não é uma lição fácil de aprender.

RALPH P. BOAS
American Mathematical Monthly, vol. 88 (1981), pgs. 727-731.
(selecc. e trad. J.F.Q.).

A INFLAÇÃO INFLACIONADA (Problema)

Num jornal de Agosto passado noticia-se o aumento de uma multa (a que pune o não uso de cinto de segurança pelos automobilistas) de 600$00 para 1500$00. O quantitativo anterior tinha sido fixado no verão de 1977, sendo o aumento agora decidido "justificado pela necessidade de adequar os montantes das multas ao processo inflacionário desenvolvido nos últimos anos". Comenta o jornal: *"...fica a saber-se que a inflação entre Junho de 1977 e Agosto deste ano ascendeu a 150%, à média de 30% por ano..."*. Ora, se é certo que um aumento de 600$00 para 1500$00 é um aumento de 150%, já a segunda parte da afirmação do jornalista é claramente incorrecta, o que suscita duas questões de natureza matemática:

- Se uma coisa custa 600$00, quanto custará ao fim de 5 anos se o seu preço sofrer um aumento anual de 30%?
- Se a inflação leva, em 5 anos, o preço de uma coisa de 600$00 a 1500$00, qual foi a taxa anual de inflação, suposta constante?

(proposto por João Filipe Queiró)

INFORMAÇÕES DIVERSAS *(continuado da pág. anterior)*

Nos dias 26 e 27 de Julho último decorreram, na Univ. de Coimbra, as provas de doutoramente em Eng. Electrotécnica (especialidade de Optimização e Teoria dos Sistemas) de João Carlos Namorado Clímaco. O candidato, que é membro do Centro de Matemática da Univ. de Coimbra (linha nº 3: Análise Numérica, Programação Matemática e Aplicações) foi aprovado, por unanimidade, com distinção e louvor.

Foram arguentes da tese, intitulada *"Programação Matemática com objectivos múltiplos-uma aplicação ao planeamento de novas unidades produtoras de energia eléctrica"*, os Profs. Luis Valadares Tavares (Inst. Sup. Técnico - Lisboa) e Mário da Silva Rosa (Univ. de Coimbra), e da mini-tese, intitulada *"Sobre o planeamento óptimo de redes de distribuição de energia eléctrica"*, o Prof. Aníbal Traça de Almeida (Univ. de Coimbra)

A equipa da República Federal da Alemanha foi a vencedora das Olimpíadas Internacionais de Matemática de 1982. Para o próximo nº do CONTACTO tentaremos obter mais informações sobre esta competição.

ISTO É UMA RATOEIRA — **Respostas**

1. A equação $x^2 - 4 = 0$ tem como soluções 2 e -2 como consequência da lei do anulamento do produto. Assim,

$$x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow (x+2)(x-2) = 0 \Leftrightarrow x+2 = 0 \lor x-2=0 \Leftrightarrow x=-2 \lor x=2$$

Frequentemente, ao resolver a equação $x^2-4=0$, escreve-se $x = \pm\sqrt{4} = \pm 2$, sendo esta expressão consequência imediata da aplicação da fórmula resolvente simplificada $x = -K \pm \sqrt{k^2 - c}$.

Recorde-se, a propósito, que na base da dedução da fórmula resolvente da equação do 2º grau $ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$ está também a lei do anulamento do produto que dá origem ao aparecimento do duplo sinal (±) em

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

A equação $x^2 - 4 = 0$ tem como soluções $+\sqrt{4}$ e $-\sqrt{4}$ também por definição de raiz quadrada de um número.

Portanto as duas soluções -2 e 2 não resultam de ser $\sqrt{4} = \pm 2$, o que aliás é falso pois $\sqrt{4} = 2$ e só 2, por convenção. Repare-se, por exemplo, que se se considerasse $\sqrt{4} = \pm 2$, $\sqrt{9} = \pm 3$; $\sqrt{16} = \pm 4$ e $\sqrt{25} = \pm 5$, a expressão

$$\sqrt{4} + \sqrt{9} + \sqrt{16} + \sqrt{25}$$

conduzia-nos a vários resultados possíveis,

$(+2) + (+3) + (+4) + (+5) = 14$
$(-2) + (-3) + (-4) + (-5) = -14$
$(+2) + (+3) + (+4) + (-5) = 4$
$(-2) + (+3) + (+4) + (+5) = 10$
etc.

2. A proposição tal como foi enunciada é falsa. Servem de exemplo as sucessões de números reais (U_n) e (V_n) tais que:

$$U_n = \begin{cases} 1 \Leftarrow n = 2K-1 \\ \frac{2}{n} \Leftarrow n = 2K \end{cases} \quad (K \in \mathbb{N}) \text{ e}$$

$$V_n = \begin{cases} -1 \Leftarrow n = 2K-1 \\ -1/n \Leftarrow n = 2K \end{cases} \quad (K \in \mathbb{N})$$

De facto, U_n e V_n não têm limite, mas $w_n = U_n + V_n$ converge para zero, porque

$$w_n = \begin{cases} 0 \Leftarrow n = 2K-1 \\ 1/n \Leftarrow n = 2K \end{cases} \quad (K \in \mathbb{N})$$

Um enunciado possível e correcto é: o limite de uma soma de duas sucessões é igual à soma dos limites dessas sucessões caso esses limites existam e sejam finitos.

3. Uma função real de variável real pode ter extremos relativos em pontos em que não é nula a 1.ª derivada. Vamos apresentar dois exemplos:

Consideremos as funções reais de variável real definidas do seguinte modo:

$$f : x \mapsto f(x) = \begin{cases} x^2 \Leftarrow x \neq 0 \\ 2 \Leftarrow x = 0 \end{cases}$$

e

$$g : x \mapsto g(x) = \begin{cases} x \Leftarrow x \geq 0 \\ -x \Leftarrow x < 0 \end{cases}$$

f tem um **máximo** relativo no ponto $x = 0$ e contudo não existe $f'(o)$, porque

$$f'_e(o) = \lim_{x \to o^-} \frac{x^2 - 2}{x - o} = +\infty$$

$$f'_d(o) = \lim_{x \to o^+} \frac{x^2 - 2}{x - o} = -\infty$$

Repare-se que

$$\exists \delta \in \mathbb{R}^+ : \forall x \in V_\delta(0)\backslash\{0\}, f(x) < 2$$

(basta escolher $\delta < \sqrt{2}$).

g tem um <u>mínimo</u> relativo no ponto $x = 0$ e contudo

$$g'_e(o) = \lim_{x \to o^-} \frac{-x - o}{x - o} = -1$$

$$g'_d(o) = \lim_{x \to o^+} \frac{x - o}{x - o} = 1$$

Portanto não existe $g'(o)$.

Repare-se que

$$\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{o\}, \ g(x) > o$$

Um enunciado possível é: Se uma função real de variável real tem um extremo relativo num ponto interior ao seu domínio e <u>se existe</u> $f'(x_o)$ então $f'(x_o) = o$.

4. Em $\mathbb{R}$, as condições $y - 3 = \sqrt{x-2}$ e $(y-3)^2 = x-2$ não são equivalentes; Considerando por exemplo as concretizações $y = 2$ e $x = 3$, enquanto a primeira condição se converte na proposição falsa $-1 = 1$ a segunda converte-se na proposição verdadeira $1 = 1$.

Repare-se ainda que elevando ao quadrado ambos os membros da condição, $y - 3 = -\sqrt{x-2}$, obtemos na mesma $(y-3)^2 = x-2$.

Já são equivalentes, porém, as condições

$$y - 3 = \sqrt{x-2} \quad \text{e} \quad (y-3)^2 = x-2 \land y-3 \geq 0$$

como consequência de $\sqrt{x-2} \in \mathbb{R}^+_o$

Assim devemos escrever

$$y = 3 + \sqrt{x-2} \Leftrightarrow y - 3 = \sqrt{x-2} \Leftrightarrow (y-3)^2 = x-2 \land y-3 \geq 0 \Leftrightarrow x = y^2 - 6y + 11 \land y \geq 3$$

5. Uma relação binária R definida num conjunto A diz-se reflexiva se

$$x \in A \Longrightarrow x R x, \forall x$$

(abreviadamente $x R x, \forall x \in A$).

Ora se $A = \phi$, R é reflexiva porque a implicação é verdadeira se o antecedente é falso.

A relação vazia S definida em $\mathbb{R}$ não é reflexiva porque

$$\exists x : x \in \mathbb{R} \land (x \leq x \lor x \leq x)$$

isto é

$$\exists x : x \in \mathbb{R} \land x = x$$

e a condição $x = x$ é universal em $\mathbb{R}$.

NO 2º CENTENÁRIO DA MORTE DO MARQUÊS DE POMBAL

por
Joaquim Namorado
(Dep. de Matemática da F.C.T.U.C.)

As Comemorações do 2º Centenário da morte do Marquês de Pombal têm decorrido discretamente, sem sair dos meios onde reinam estudiosos e especialistas. Para a generalidade dos portugueses Pombal continuará a ser o tirano de "pêlos no coração", o carrasco sanguinário dos nobres, o perseguidor dos jesuítas e quejandos e alguns espíritos argutos não deixarão de referir a influência que nele exerceram os iluminados e os iluministas, os libertinos. Se é certo que ainda não morreram as paixões que a sua pessoa e a sua obra levantaram, se os partidos que a seu respeito se formaram continuam activos e acerbos, talvez tenha chegado o tempo de estudar a sua política com a necessária objectividade e essencial desejo de entender. No pequeno espaço do CONTACTO, sem esquecer as limitações de que naturalmente sofre quem não é especialista, penso que não se pode deixar escapar a ocasião de balizar-se o que na sua reforma do ensino superior se refere à matemática e às ciências exactas. Com efeito, as suas ideias e os métodos que conduzem à sua realização mostram a vontade inabalável não de transformar uma escola, ou um ensino, mas a de criar os fundamentos de uma política que levasse a transformações profundas na sociedade portuguesa. À Universidade mãe e teta de bacharéis e licenciados cujo destino era um lugar à mesa do Estado, com o acompanhamento das respectivas rendas e prebendas, o Ministro do Reino preferia uma escola que formasse, forjada no método experimental do seu ensino, uma camada de técnicos, engenheiros, naturalistas, médicos e militares, que pudessem ser os activos agentes das modificações indispensáveis nas estruturas sociais do nosso país, fazendo dele uma nação moderna.

A pedra angular dessa política seria o desenvolvimento do ensino da matemática, considerado como fundamental a todo o conhecimento, a todos os ramos do saber. Foi este o espírito que levou à criação da Faculdade de Matemática a que foi dado todo o apoio e concedidos alguns privilégios. A reacção que levantou cabeça com a morte de D. José I e o exílio de Pombal não conseguiu, apesar dos seus esforços, desfazer completamente a reforma de Pombal, mas teve poder suficiente para obliterar o seu sentido, iludir os seus desígnios e alterar as suas metas.

Basta consultar alguns *Documentos da Reforma Pombalina*, cuja 1º volume foi publicado por Manuel Lopes de Almeida, em 1937, para nos certificarmos da justeza das afirmações feitas. Alí encontraremos em primeiro lugar bem marcada a importância do ensino da Matemática, feito aos alunos das Faculdade de Medicina, Filosofia, Teologia e tido como essencial; o mesmo sucede com a nomeação de lentes e doutores e a escolha dos manuais destinados ao estudo dos alunos dos vários cursos, sem esquecer a preocupação com o seu aproveitamento e costumes. Analogamente estão insertos no volume importantes documentos que referenciam a reacção à reforma pombalina: o recurso aos velhos estatutos (cuja destruição fora ordenada); a perseguição a professores como sucedeu a José Anastácio da Cunha; a repressão visando as leituras perversas dos estudantes, contrárias à Religião e aos Costumes; a ordem para que as Congregações das Faculdades informem não só sobre o saber dos bacharéis, licenciados e doutores, mas, também, sobre os seus costumes, atitudes, ideias e merecimentos, que influenciariam no modo de atender as suas pretensões a lugares do Estado e também, nos casos mais graves, no merecido castigo.

As Comemorações do 2º Centenário da morte do Marquês de Pombal seriam uma ocasião oportuna para demarcar com algum rigor o que na vida portuguesa se define como orientado no sentido das suas Reformas e, em oposição, o que lhe é manifestamente contrário. Ainda hoje — sim, ainda hoje!

UMA EQUAÇÃO DIFERENCIAL *(continuado da pág.1)*

lução? Neste caso, podemos, conforme se mostra no lema seguinte.

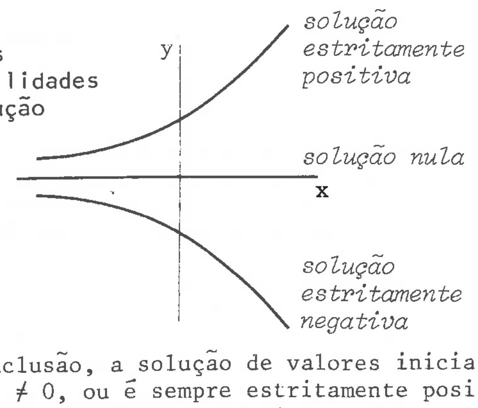
Lema - Seja $\emptyset(x)$ a solução da equação (a) de condições iniciais $\emptyset(x_o) = y_o$. Então,

$$\text{se } y_o > 0, \quad \emptyset(x) > 0,$$
$$\text{se } y_o = 0, \quad \emptyset(x) \equiv 0,$$
$$\text{se } y_o < 0, \quad \emptyset(x) < 0, \text{ para todo o } x.$$

Demonstração. A equação (a) admite a solução nula como se vê por substituição directa. Ora, dado $y_o \neq 0$, seja $\emptyset(x)$ a solução tal que $\emptyset(x_o) = y_o$. Esta solução não pode anular-se. De facto, se $\emptyset(x_1) = 0$, isso significa que esta solução tem valores iniciais $(x_1, 0)$.

Mas, a solução nula também tem esses valores iniciais e como só há uma solução - a solução nula - com esses valores iniciais, então $\emptyset(x)$ teria que ser a solução nula o que é absurdo pois $\emptyset(x_o) = y_o \neq 0$. Q.E.D.

As três possibilidades de solução



Em conclusão, a solução de valores iniciais (x_o, y_o), $y_o \neq 0$, ou é sempre estritamente positiva ou sempre estritamente negativa, dependendo do valor de y_o. Esta conclusão legitima a passagem (a) → (b).

Tomar o módulo $|\emptyset(x)|$ significa trabalhar com $\emptyset(x)$ ou com a sua simétrica.

contacto

Nº **8** SETEMBRO 1982

Organizaram este número: José Machado Gil, João Filipe Queiró, Armando Gonçalves.

—

Delegação Regional do Centro da Sociedade Portuguesa de Matemática — Departamento de Matemática da F.C.T.U.C. - 3000 - COIMBRA

—