



ABERTURA

A Direcção Regional do Centro da S.P.M. aproveita este espaço para de novo cumprimentar todos os sócios e referir que tem estado a trabalhar para tornar realidade as iniciativas que vão sendo já habituais na Região Centro da nossa Sociedade — Encontro Regional, Mini-Olimpíadas, Escola de Verão, etc. Pedir subsídios a Instituições e organizar tem sido o nosso trabalho.

Dentro do espírito da descentralização, foi já decidido que o V Encontro Regional se realizará na Figueira da Foz, nos últimos dias de Setembro. Temos promessas de boas instalações e outras facilidades, para além do mar!...

Logo que seja possível daremos notícias sobre o assunto, esperando que os sócios vão planeando os seus trabalhos para estarem presentes e participarem activamente.

Estamos a pensar incluir no V Encontro uma Mesa Redonda para discussão dos programas de Matemática desde o Ciclo Preparatório até à entrada na Universidade. Mas estamos a sentir sérias dificuldades na sua concretização.

Gostaríamos de acrescentar que ainda não foi possível uma reunião com os Órgãos Directivos Nacionais da S.P.M.. No próximo número talvez possamos dar mais notícias.

A Direcção da Delegação Regional do Centro da S.P.M.

DECORAR A TABUADA OU UTILIZAR AS CALCULADORAS?

por

Jaime Carvalho e Silva

(Assistente no Dep. de Matemática da F.C.T.U.C.)

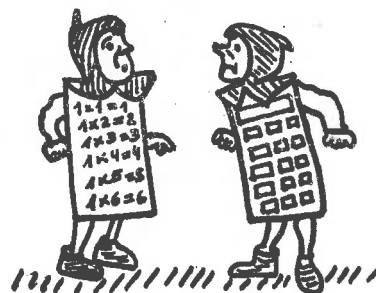
Nos últimos anos tem-se assistido a um espectacular progresso da indústria electrónica, que tem tido como consequência imediata a existência de calculadoras cada vez mais poderosas e, sobretudo, a preços cada vez mais acessíveis.

A grandeza de tal evolução está bem retrata da nas seguintes palavras de Toffler: "Se a indústria automóvel tivesse progredido o que a indústria da computação progrediu nos últimos 30 anos, um Rolls-Royce custaria 150 escudos e andaria 500 mil quilómetros com um litro de gasolina".

É certo que actualmente, em Portugal, os preços ainda não são muito acessíveis para a grande maioria da população; no entanto, a evolução no sentido da acessibilidade é irreversível, e penso que nos deveremos preparar para o impacto que tal facto terá (se é que não começa já a ter) no ensino da matemática.

Nesta pequena nota pretendo expôr alguns dos problemas, vantagens e consequências da utilização de calculadoras no ensino da Matemática desde o jardim de infância à Universidade.

Não tenho a pretensão de ser exaustivo, muito menos a de propôr soluções para Portugal, mas



apenas a de levantar algumas questões (muito gerais, devido à grande extensão e delicadeza do assunto) confiando no velho provérbio: "Homem prevenido vale por dois". E se a experiência de outros países não deve ser decalcada, deve ser estudada para que não se caia nos mesmos erros e se possam aproveitar todas as potencialidades.

Antes de continuar, é necessário aclarar o que entendo por calculadora; tenho vindo a empregar essa designação num sentido lato, como "máquina de fazer cálculos". Há que distinguir entre as chamadas calculadoras electrónicas (programáveis ou não) e os computadores (micro, mini e grandes computadores). As primeiras efectuem as quatro operações fundamentais e calculam um certo número de funções (trigonométricas, logaritmo, etc.); as programáveis permitem efectuar uma determinada sequência de um número reduzido de operações através de uma linguagem muito simples. Os computadores permitem fazer tudo isso e muito mais, melhor e mais depressa.

(continua na pág. 6)

2 O ENCONTRO INTERNACIONAL DE MATEMÁTICA ORGANIZADO PELA S.P.M.

Reportagem de J.Machado Gil

De 29 de Março a 3 de Abril deste ano, realizou-se o Encontro Internacional de Matemática, organizado pela Sociedade Portuguesa de Matemática, em Lisboa. O encontro tinha duas partes, uma designada por Simpósio Internacional de Análise Funcional e Equações Diferenciais, e outra designada por Colóquio Internacional "O Ensino da Matemática nos Anos 80". Foi anunciado que as inscrições seriam aceites até um número limitado e uma data limite. Os boletins de inscrição pediam a indicação da parte do encontro que mais interessava, e que seria respeitada, no caso de não poder ser aceite a inscrição nas duas partes. Aconteceu que não foram comunicadas a alguns sócios as rejeições das suas inscrições no Simpósio, o que os levou a comparecer na data de abertura do Encontro, e a tomar conhecimento, nessa altura, que poderiam acompanhar os trabalhos do Simpósio, mas sem qualquer indicação do horário previsto para as sessões. Alguns sócios, que se tinham deslocado de longe e sujeitos a despesas pesadas de transporte e estadia, mostraram o seu desagrado pelo tratamento, que estavam a ter, que consideravam de excepção e ofensivo, determinante até da renúncia à qualidade de sócios. Alguns sócios chegaram à Comissão Organizadora, que na sessão de abertura, pediu desculpa pelo falta de programas das sessões do Simpósio. Esta sessão teve início às onze horas do dia previsto, com uma mesa de presidência constituída pelos Professores Guerreiro, Campos Ferreira, Dias Agudo, Armando Machado e Pereira Gomes. O Doutor Armando Machado apresentou saudações aos participantes no Simpósio e o Doutor Guerreiro fez uma evocação breve de José Sebastião Silva e dos trabalhos científicos deste.

O Simpósio, como parte privilegiada e nobre do Encontro, desenvolveu-se em várias sessões desde o dia 29 de Março ao dia 2 de Abril, paralelamente ao Colóquio, a partir do dia 31 de Março. Para o Simpósio foram anunciadas 57 comunicações e 137 participantes, dos quais 19 professores de escolas secundárias e os restantes ligados a universidades ou centros de investigação matemática. Para o Colóquio foram anunciadas 510 inscrições e 20 comunicações. Perante estes números, custa a perceber as razões que levaram à rejeição de mais algumas inscrições de sócios no Simpósio. Os participantes no Simpósio tiveram sempre lugares, para se sentarem, nas salas destinadas às sessões, mesmo, quando mudaram atabalhoadamente para salas mais pequenas; os participantes no Colóquio recorreram, em algumas sessões, aos degraus alcatifados do anfiteatro.

Avalio que o Simpósio foi um êxito da Organização, atendendo ao número de participantes e colaboradores estrangeiros e de comunicações.

O Colóquio começou com uma sessão de abertura, concorrida, às dezasseis horas e um quarto, do dia 31 de Março. Sem mesa de presidência, mas com lugares de honra para os convidados: Presidente do Instituto Nacional de Investigação Científica, Embaixador de Itália, Adido Cultural da mesma Embaixada, e conferencistas Emma Castelnuovo, D.A. Quadling, G. Brousseau e Maria Paz Jauregui. O Professor Doutor Guerreiro, depois de uma breve introdução, agradeceu às entidades, que apoiaram a organização do colóquio, e lembrou mais uma vez, e em repetição, José Sebastião Silva e a sua obra.

Seguiu-se a conferência de Emma Castelnuovo, intitulada "Vers un enseignement de la mathématique que puisse donner une culture scientifique".

Como homenagem a José Sebastião e Silva, lembrou a convivência de ambos, em Itália, durante a última Grande Guerra, e depois disso.

Pensa que a cultura científica é baseada numa formação científica, adquirida no desenvolvimento do raciocinar, do deduzir e do pensamento lógico. Adverte que o ensino da matemática não é só dedução, tem de se interessar pelos outros aspectos. Há que regressar ao concreto.

Por volta de 1800 o Euclides era ensinado em toda a parte. Felix Klein, em 1872, em Erlangen, lança o método axiomático, com toda a firmeza.

Em 1957, a O.C.D.E., em Royaumont, e, em 1960, em Dubrovnik, proclama o afastamento do Euclides e preconiza a interligação Álgebra-Análise-Geometria. Atitude propiciada pelo movimento bourbakista de 1933. Em 1976 manifesta-se a tendência para a geometria intuitiva. Em 1980 assiste-se à preocupação de gerar uma cultura científica apropriada à formação de cidadãos. Cultura de hoje e de amanhã. Ensino pela experimentação: geometria por processos de laboratório, funções, extremos e optimização.

Mr. Quadling desenvolveu, no dia seguinte, o tema "Realism in the planing of mathematics curricula". Algumas considerações sobre o sistema escolar inglês: diversidade de escolas e diversidade de programas.

Cada escola tem os seus programas. Aponta elementos didácticos que deveriam estar contidos em todos os programas: generalização, conjecturas, classificação, desenvolvimento da habilidade de tomar decisões e de fazer representações especiais, construção de modelos matemáticos.

Há exames obrigatórios, por volta dos 11-13 anos de idade, e, por volta dos 16-18 anos, mas baseados em vários programas. O Governo procura controlar o sistema, com intervenção na extensão e conteúdos dos programas, afim de assegurar a uniformidade de critérios, mas o controlo é fraco, e, algumas vezes, considerado atentado às liberdades e prerrogativas dos professores. O Governo manteve escolas unificadas, com carácter humanístico e técnico, procurando oferecer iguais oportunidades a todos. Abordou a questão do sucesso em Matemática e apontou estudos psicológicos e didácticos feitos por vários grupos. São já conhecidos vários aspectos dos mecanismos de aquisição de quaisquer conhecimentos segundo as idades dos alunos. O ensino da matemática está também sujeito a pressões sociais apontadas por alguns analistas. Concluiu pela necessidade de programas multifacetados, e respeitadores do desenvolvimento psicológico dos alunos.

(conclui no próximo número)

INFORMAÇÕES DIVERSAS (continuado da pág.5)

O Grupo de Trabalho dos Açores da Delegação Regional do Sul e Ilhas realizou, nos dias 24, 25 e 26 de Fevereiro passado, sessões de esclarecimento e estudo da Teoria dos Conjuntos, juntamente com um grupo de professores do Ensino Primário. As sessões ocuparam nove horas de trabalho e foram orientadas pela colega Dr.ª D. Maria da Conceição Garcia com a ajuda dos outros elementos do Grupo de trabalho.

Em face do bom acolhimento do trabalho, o mesmo Grupo tenciona realizar outro encontro semelhante, em Setembro próximo.

por exemplo $p = C(\frac{2-3\delta}{5\delta})$, onde $C(x)$ designa a característica de x .

5. Uma relação binária R definida em $A \neq \emptyset$, se for simétrica e transitiva é necessariamente reflexiva, porque

$$\begin{aligned} xRy &\implies yRx, \quad \forall x, y \in A && \text{(simetria)} \\ xRy \wedge yRx &\implies xRx, \quad \forall x, y \in A && \text{(transitividade)} \end{aligned}$$

Donde

$$xRx, \quad \forall x \in A.$$



por

Ana Isabel Rosendo (Assistente no Dep. de Matemática da FCTUC)

M. Rolão Candeias (Assistente convidado na Fac. Economia U.C.)

Estando convencidos de que chamar a atenção para os erros não propaga esses mesmos erros e esperando até que os evite, resolvemos criar esta rubrica em que sob a forma de "enigma" se levantam questões que são vulgarmente referidas pelos alunos como "ratoeiras".

No texto que se segue há afirmações incorrectas ou mesmo erradas. Quais e porquê? (ver soluções pág. 7).

1. Em \mathbb{R} o domínio da expressão designatória $\frac{1}{x-2}$ é $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ porque, para $x = 2$, $\frac{1}{x-2}$ é ∞ .

2. "O valor absoluto de um número relativo é o que fica representado se à sua designação retirarmos o sinal".

3. $a^0 = 1, \quad \forall a \in \mathbb{R}$.

4. Provemos, usando a definição, que a sucessão de números reais $(\frac{2}{5n+3})$ converge para zero, isto é, que

$$\forall \delta \in \mathbb{R}^+, \quad \exists p \in \mathbb{N}: \forall n \in \mathbb{N},$$

$$n > p \implies \left| \frac{2}{5n+3} - 0 \right| < \delta.$$

$$\text{Ora, } \left| \frac{2}{5n+3} \right| < \delta \iff \frac{2}{5n+3} < \delta$$

$$\iff \frac{5n+3}{2} > \frac{1}{\delta}$$

$$\iff 5n > \frac{2}{\delta} - 3$$

$$\iff n > \frac{2-3\delta}{5\delta}$$

donde: $n > \frac{2-3\delta}{5\delta} \implies \left| \frac{2}{5n+3} \right| < \delta$. Logo, dado um δ , existe de facto um p nas condições desejadas,

III MINI-OLIMPIADAS DE MATEMÁTICA

A final das categorias A e B teve lugar no passado dia 21 de Abril, nas seguintes escolas: E. Sec. nº 1 de Aveiro, E. Sec. das Caldas da Rainha, E. Sec. Nun'Álvares de Castelo Branco, E. Prep. de Celorico da Beira, E. Sec. do Entroncamento e E. Sec. Alves Martins de Viseu. Os vencedores serão conhecidos brevemente.

À 1.ª eliminatória da categoria C concorreram 22 alunos (21 de Coimbra e 1 de Aveiro) que passaram todos à eliminatória seguinte; esta realizou-se no passado dia 28/4/82 com a presença de 16 concorrentes.

A sessão de entrega de prémios deverá ter lugar no próximo dia 6 de Junho no Dep. de Matemática; a entrega dos prémios será precedida de uma conferência pelo Prof. Doutor A. St. Aubyn, do Instituto Superior de Agronomia (Lisboa) com o título: "A Matemática e as Ciências da Natureza". O programa definitivo da sessão de entrega de prémios será divulgado oportunamente.

Publicamos a seguir o ponto da 2.ª eliminatória da categoria C:

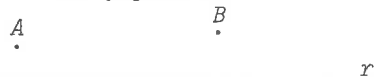
1. Resolva em \mathbb{R} o sistema

$$\begin{cases} 3^x - 4^{y+1} = -3 \\ 3^{x+1} + 5 \cdot 4^y = \frac{49}{4} \end{cases}$$

2. A velocidade da corrente de um rio é de 3 km/h. Um barco efectua nesse rio um percurso rectilíneo de ida e volta. No sentido da corrente percorre 4 km e demora uma hora a fazer o percurso completo.

Sabendo que se deslocou sempre em movimento uniforme calcula o tempo gasto nos primeiros 4km.

3. Um caçador vai de A a B, mas passando sempre pelo rio r (ver figura).



Que percurso terá de fazer, de modo que a distância percorrida seja mínima?

4. Considera o conjunto A de elementos da forma $m^2 - n^2$, onde m e n designam números naturais ímpares com $m < n$.

a) Mostra que existe pelo menos um número natural maior do que 1(um), que divide todos os elementos de A.

b) Qual o maior natural que divide todos os elementos de A?

ASSEMBLEIA GERAL NACIONAL DA S.P.M.

No dia 1 de Abril de 1982 reuniu, num anfiteatro do complexo II do INIC, em Lisboa, a Assembleia Geral da S.P.M..

Tratava-se duma Assembleia Geral ordinária que tinha a seguinte ordem de trabalhos:

- 1) Aprovar o Relatório e as Contas.
- 2) Eleger a Mesa da Assembleia Geral, o Secretariado (composto pelo Secretário-Geral, Secretário-Geral Adjunto e Tesoureiro) e o Conselho Fiscal.
- 3) Aprovar alterações aos Estatutos.

Temos, para já, a assinalar o número reduzido (não ultrapassava as três dezenas) de associados da S.P.M. que assistiu a esta Assembleia Geral, que começou com o Presidente da Mesa no uso da palavra. Foi por ele focada a questão da transferência desta Assembleia para Abril quando ela se deveria ter efectuado, segundo o artigo 36º dos Estatutos, no mês de Janeiro. Teceu, em seguida, algumas considerações que se prenderam com a aprovação, por parte das Direcções das Delegações Regionais do Norte e do Sul e a discordância da Direcção da Delegação do Centro, em relação ao adiamento da Assembleia Geral e à polémica que este mesmo adiamento gerou.

No ponto 1 da ordem de trabalhos foram apro-

vados o Relatório e as Contas da Direcção da S.P.M. e ainda um voto de louvor à Direcção.

No terceiro ponto, que de acordo com uma decisão votada pela Assembleia foi permutado com o ponto 2, foram, por proposta da Direcção, aprovadas alterações a alguns artigos dos Estatutos da S.P.M. nomeadamente no que diz respeito à Constituição do Conselho Directivo, que passa a ter como elementos o Presidente da S.P.M., os membros das Direcções das Delegações Regionais, o Secretário-Geral, os três Secretários-Adjuntos e o tesoureiro; ao modo de eleição do Presidente da S.P.M., que será eleito por um colégio eleitoral de que fazem parte todos os membros do Conselho Directivo com excepção, óbvia, do Presidente, às ligações com as Sociedades Matemáticas estrangeiras que serão asseguradas por um Secretariado constituído pelo Secretário-Geral, os três Secretários-Gerais Adjuntos e o Tesoureiro. Nestas alterações aos Estatutos são ainda contempladas questões que se prendem com a gestão financeira da S.P.M..

Finalmente, no que diz respeito ao segundo ponto da ordem de trabalhos, foram aprovadas as listas únicas concorrentes à Mesa de Assembleia Geral, ao Secretariado e ao Conselho Fiscal. Os resultados destas votações bem como a constituição das listas são tratados noutra local deste número do CONTACTO.

INFORMAÇÕES DIVERSAS

Sob a orientação do INIC iniciou-se, com o III volume (que contém os trabalhos de investigação mais recente), a publicação das "*Obras de José Sebastião e Silva*". Prevê-se um preço de 750\$ por exemplar.

Quando da sua estadia nos Açores (ver CONTACTO nº 5), o Prof. Renato Pereira Coelho (Univ. de Coimbra) proferiu, a convite do Grupo de Trabalho dos Açores da Deleg. Regional do Sul e Ilhas da S.P.M., uma conferência sobre "*Aspectos da Matemática na Antiga Mesopotâmia*". O acto decorreu no dia 23 de Março e a ele assistiram membros do Grupo de Trabalho, professores do ensino secundário e alunos do 12º ano.

O Congresso Internacional de Matemáticos, previsto para Agosto deste ano em Varsóvia, foi adiado para 1983.

Conforme previsto, realizaram-se em Salamanca, de 12 a 16 de Abril, as IX Jornadas Hispano-Lusas de Matemática. Estiveram presentes cerca de 300 matemáticos. Portugueses estiveram poucos, à volta de trinta. O figurino foi o habitual: comunicações de carácter técnico, divididas por nove secções especializadas. Ponto alto das Jornadas foi sem dúvida a conferência plenária do Prof. Norberto Cuesta Dutari (Univ. de Salamanca), que tinha o título "*Matemática finita, matemática assintótica e matemática infinita*" e que constituiu um verdadeiro festival de humor e erudição.

Paralelamente a esta reunião decorreram as I Jornadas Espanholas de Didáctica da Matemática.

As X Jornadas Hispano-Lusas de Matemática terão lugar em 1983 na cidade espanhola de Palência.

De 11 de Julho a 14 de Agosto de 1982 decorre, na cidade italiana de Perugia, mais um Curso de Verão de Matemática. O Curso é dirigido a jovens licenciados.

Deslocou-se a Espanha o Prof. Graciano de Oliveira (Univ. de Coimbra), de 15 a 21 de Maio, a fim de fazer algumas conferências no Colégio Universitário de Alava (Vitória).

Em meados de Outubro de 1982, realizar-se-á em Coimbra um mini-encontro internacional de Álgebra Linear. Conta-se principalmente com a presença de matemáticos portugueses e espanhóis.

A Delegação Regional do Centro planeia organizar um encontro, provavelmente durante as férias da Páscoa de 1983, para discussão do futuro e rumos da investigação matemática em Portugal. Está neste momento a ser levado a efeito um inquérito entre as pessoas que se dedicam à investigação a fim de se recolherem dados sobre a receptividade que tal encontro teria e sobre os assuntos que deveriam ser tratados. A Direcção designou o Prof. Graciano de Oliveira (Univ. de Coimbra) para proceder aos estudos prévios e organização e com ele poderão os interessados obter informações.

Com a recente publicação dos Volumes II (Análise e Probabilidades e Estatística) e III (Métodos Numéricos e Computação e Mecânica, Astronomia e Física Matemática), ficou concluída a edição das Actas das VIII Jornadas Luso-Espanholas de Matemática (Coimbra, Maio de 1981). Os interessados na obtenção destas Actas devem contactar a Comissão Organizadora das VIII Jornadas.

A Dr.^a Maria Teresa Fernandes de Oliveira Martins (Instituto Universitário da Beira-Interior - Covilhã) concluiu, em Novembro de 1981, as suas provas de doutoramento na Universidade de Warwick (Inglaterra). A sua tese intitulava-se "*Hook representations of the general linear group*".

Em 28 e 29 de Outubro de 1982 realizar-se-á em Coimbra o III Encontro de Física-Matemática. Conta-se com a presença de matemáticos e físicos portugueses e alguns espanhóis.

(continua na pág. 2)

AS MATEMÁTICAS MODERNAS

As últimas décadas conheceram uma profunda mutação mundial das Matemáticas, devida à influência de uma equipa de matemáticos, quase todos franceses, que deu a si própria o nome de Nicolas Bourbaki, e publicou (e continua a publicar), desde há pouco mais de 40 anos, os "Eléments de Mathématiques", que incluem já perto de 40 livros (...). Não é possível descrever aqui a revolução desencadeada por esta obra no pensamento e na produção matemáticos, mas ela é considerável. Ela não teve só qualidades! Por exemplo, ela privilegiou demasiado as matemáticas puras, ignorando quase por completo as matemáticas aplicadas e mesmo as probabilidades. As ideias modernas sobre as ligações de todas as ciências e conhecimentos entre si, e das ciências (incluindo a matemática) com a tecnologia, são estranhos a Bourbaki (que, em contraposição, construiu a unidade das matemáticas). Os matemáticos membros de Bourbaki possuem todos, por outro lado, uma obra individual nos ramos mais diversos das matemáticas, e nunca pensaram em fazer do seu trabalho expositório um método de aprendizagem para os jovens, ainda que os seus livros tenham tomado as matemáticas desde o início; isto por uma razão bem conhecida pelos matemáticos, a saber, que os fundamentos das matemáticas são as partes mais difíceis de expor e por vezes de compreender; elas aparecem portanto no início de uma exposição geral destinada aos matemáticos, mas concerteza que não no início da formação matemática dos jovens, ou dos físicos e engenheiros. Para só citar alguns exemplos, é preciso explicar às crianças (assim como aos engenheiros!) o que são um ângulo, uma área, um volume, enquanto que, numa teoria matemática coerente, isso aparece numa fase muito adiantada da exposição!

Aliás toda a gente vê que o postulado de Euclides e as geometrias não-euclidianas levaram muito tempo a ser destrinchados pela ciência, enquanto que o paralelismo se impõe aos nossos olhos imediatamente. Os métodos modernos de exposição da teoria dos conjuntos, dos grupos, anéis, corpos, espaços vectoriais, espaços euclidianos, da topologia geral, etc... introduziram-se pouco a pouco em todos os meios matemáticos, nos programas das universidades francesas nos anos 50 e princípios de 60, e a partir daí nas grandes escolas e depois (...) nos liceus. Esta expansão foi fecunda; ela encontrou muitas oposições, por que estas exposições modernas contrariavam os hábitos adquiridos; mas, no conjunto, ela permaneceu razoável. Hoje os físicos e engenheiros formados nas grandes escolas e nas universidades adoptaram uma boa parte desta linguagem, e isto à escala mundial. Os excessos do "bourbakismo" fizeram alguns estragos entre os matemáticos, como sempre em casos semelhantes, mas de maneira relativamente limitada e controlada.

Infelizmente, as coisas passaram-se de forma completamente diferente nos ensinamentos secundário e elementar. Pouco a pouco, introduziram-se as "Matemáticas Modernas" nos liceus, depois nos Colégios e Escolas primárias, mesmo por vezes hoje na pré-primária. É evidente que uma certa modernização era necessária e benéfica. A linguagem matemática e mesmo científica ganha sempre em ser unificada, simplificada, axiomatizada. Ao princípio as famílias ficaram surpreendidas, mas

depois habituaram-se. As crianças pegaram bem em definições claras, gerais, abstractas, bem articuladas, diferentes do pensamento quotidiano imediato. Professores, pais, crianças, todos tinham um pouco a impressão exaltante de participar na compreensão colectiva da ciência moderna. As discussões e reflexões havidas a este propósito foram frutuosas para todos os participantes.

(...) Esta reforma impulsionou aliás os físicos a reformar também a física nos liceus, e a introduzi-la mais cedo; esperemos que os biólogos façam o mesmo.

Mas, infelizmente, havia nisto uma parte enorme de ilusão. Professores, pais e crianças não aprendiam assim as "as matemáticas modernas", mas apenas a linguagem de base elementar que está subjacente a uma matemática moderna extraordinariamente vasta no mundo, diversificada, poderosa, de que as definições dadas nos liceus e escolas (do mundo inteiro!) não eram senão o ABC. Um imenso proselitismo apoderou-se de todos, em todo o lado, inclusivé em países do Terceiro Mundo, e levou estes métodos extremamente longe. Pouco a pouco, substituiu-se toda a riqueza das antigas matemáticas dos liceus, teoremas, figuras geométricas, relações entre as matemáticas e as outras ciências, por uma multidão de axiomas e de definições, incompreensíveis por uma grande parte dos alunos, e muito pobre em resultados. Uma matemática é rica se introduz poucos conceitos e estruturas, e muitos teoremas acerca deles; a matemática moderna das escolas ou colégios introduzia uma quantidade enorme de conceitos e definições, e quase nenhum teorema; é uma matemática muito pobre. É formadora para uma minoria, deformadora na sua maior parte. As crianças aprendem numerosas estruturas de que não encontrarão, ao longo da sua escolaridade, quase nenhum exemplo. Quase se tentou violar a consciência infantil, para a fazer adoptar com toda a certeza conceitos rigorosos; forçando-as a representar rectas por "batatas", está-se efectivamente mais seguro de que não cometerão petição de princípio, porque as propriedades a demonstrar, visíveis nas rectas, já o não são nas batatas, e de que deverão portanto fazer raciocínios rigorosos; infelizmente, na verdade, a maioria das crianças já nem se quer compreende o que se lhes pede com estas batatas a que se dá o nome de rectas.

Deforma-se assim, aliás, a sua ideia sobre a matemática. O objectivo da matemática não é demonstrar rigorosamente coisas que toda a gente vê; é encontrar resultados ricos, e, para se estar seguro deles, demonstrá-los; alguns são imediatamente visíveis, a maior parte não o é! Introduziram-se à vontade definições empoladas, setas, objectos abstractos que nenhum cientista, mesmo se matemático puro, alguma vez manipulou ou manipulará (há também muitas setas em matemática, e é preciso aprender a servir-se delas, mas não são essas). É difícil apontar exactamente onde estão as responsabilidades desta avalanche. O que é certo é que os matemáticos da Universidade deveriam todos ter travado a corrida antes que ela se tornasse galopante.

Eles deixaram-se ficar um pouco de fora, como se isto não lhes dissesse respeito, sem conhecer a amplitude do mal que se estava a fazer, no fundo, em seu nome! É lamentável. (O autor destas linhas também se acusa aqui a si próprio!). Os livros de matemática do ensino secundário ti-

(continua na pág. 7)

ELEIÇÕES NACIONAIS

Decorreram no dia 1 de Abril de 1982 as eleições para os órgãos nacionais da SPM, tendo, a todos eles, concorrido listas únicas. Os resultados foram os seguintes:

SECRETARIADO

- Secretário Geral - *Antônio Gabriel St. Aubyn* (Prof. do Instituto Superior de Agronomia)
- Secretário Geral Adjunto - *José António Perdigão Dias da Silva* (Prof. da Fac. de Ciências de Lisboa)
- Tesoureiro - *Maria da Graça Lopo* (Instituto Gulbenkian de Ciência)

Votos a favor: 109. Nulos: 2.

MESA DA ASSEMBLEIA GERAL

- Presidente - *João Cosme Santos Guerreiro* (Prof. da Fac. de Ciências de Lisboa)
- 1º Secretário - *Augusto Franco Oliveira* (Assistente da Fac. de Ciências de Lisboa)
- 2º Secretário - *Jorge Serra Lopes* (Professor da Escola Naval)

Votos a favor: 96. Nulos: 14.

CONSELHO FISCAL

- Presidente - *Graciano Neves de Oliveira* (Professor da Fac. de Ciências e Tecnologia da Univ. de Coimbra)
- Secretário - *António Luis Peixoto Antunes* (Assistente da Faculdade de Economia de Coimbra)
- Relator - *Maria do Céu Pinto Basto* (Prof. da Escola Secundária Ferreira Borges)

Votos a favor: 109. Nulos: 2.

A S.P.M. tem actualmente mais de mil sócios pelo que, e como vem sendo hábito, a afluência às urnas foi muito pequena.

Todos os órgãos eleitos tomaram posse no passado dia 8 de Maio.

TABUADA OU CALCULADORAS? (continuado da pág. 1)

Para o ensino, têm interesse as calculadoras pela sua facilidade de utilização e baixo preço, e os microcomputadores devido ao interessante equilíbrio entre uma grande capacidade e um preço bastante acessível.

Claro que nos poderemos perguntar se trará algum benefício a introdução das calculadoras e computadores na aula de matemática. Mesmo que se pense que não, teremos de concordar com C. Greenes: "Com a difusão que estes têm, é essencial que os alunos aprendam a usá-los". Claro que a sua difusão não pode ser incontrolada pois, caso contrário, acontecerá o que F.F. Bonsall muito justamente assinala: "Talvez os poderes matemáticos da raça humana se atrofiem se ela levar uma vida fácil e de conforto, e depender das calculadoras na escola".

E nem se podem ignorar as limitações inerentes a tais máquinas, nem que se tirarão benefícios se a sua utilização fizer parte de um currículo devidamente estruturado.

Passemos pois a uma breve análise das questões relacionadas com a introdução das calculadoras na aula de matemática, e em seguida dos computadores.

Existem estudos que mostram a utilidade das calculadoras no ensino da contagem no jardim de infância e que, ao contrário do que se poderia supor, as crianças apreendem bem o significado do "carregar no botão".

Já na escola primária as possibilidades são mais diversas: verificação imediata das respostas a problemas, exploração de padrões de números, cálculos com números grandes, estimativas da ordem de grandeza dos cálculos, etc..

Na escola secundária as aplicações são quase ilimitadas: resolução de problemas com cálculos demorados longos para serem feitos à mão, motivação das partes mais abstractas da álgebra devido à grande rapidez dos cálculos, verificação da velocidade de convergência de uma sucessão; utilização como uma espécie de "laboratório matemático": procura de padrões, formulação de conjecturas, teste de hipóteses, explicação de regularidades; as calculadoras justificam o interesse de operações como

$$x^6 - 10x^4 + 12 = (x^2 - 10)x^4 + 12$$

e simplificam operações como

$$\begin{aligned} x^2 &= 145^2 - 144^2 \\ &= (145 + 144)(145 - 144) \\ &= 289 \\ x &= 17 \end{aligned}$$

Claro que não se pode deduzir deste breve enumerar de vantagens que não há inconvenientes, sobretudo devido à tentação de utilizar a calculadora como um simples "instrumento de preguiça", isto é, substituindo-a à tabuada. Uma das limitações advem dos erros de arredondamento que se podem propagar e dar resultados falsos, como aquele que obtive na minha calculadora de bolso:

$$\log \log \log \log e^e = \frac{3}{10^{13}}$$

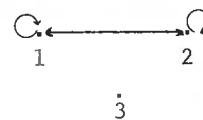
Existem inúmeros estudos sobre as consequências da introdução das calculadoras na aula (em [7] é descrita uma experiência no 10º ano de escolaridade). É de notar que se está longe de uma unanimidade nas conclusões: uns concluem que não há diferenças significativas ao nível da aprendizagem, da retenção dos conhecimentos, ou do interesse pela matemática; outros concluem que as calculadoras trazem benefícios (por vezes só a certas categorias de alunos).

No entanto, globalmente, o saldo é considerado positivo, pois o N.C.T.M. (Associação Americana dos Professores de Matemática) na sua Agenda de Acção para os anos 80 recomenda, em 3º lugar, que se "explorem todas as vantagens oferecidas pelos computadores e calculadoras" em todos os graus de ensino.

É altura de referir que não se trata de substituir a tabuada pela calculadora, de modo nenhum! Trata-se, sim, de auxiliar o ensino da matemática tornando-o mais "prático" (no fundo, de acordo com o provérbio chinês: "Ouço e esqueço-me. Vejo e lembro-me. Faço e compreendo.").

(conclui no próximo número)

ISTO É UMA RATOEIRA — Respostas



1. O domínio é $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ porque a expressão de signatória $\frac{1}{x-2}$ converte-se, para a concretização $x = 2$, em $\frac{1}{0}$, que não designa nenhum ente em \mathbb{R} , visto que não há nenhum número real que multiplicado por zero dê um.

2. Esta definição não é de usar porque:

- (i) Não fica definido $|0|$, visto o zero não ter sinal.
- (ii) Se considerarmos $| -(-3) |$ qual é o sinal que devemos retirar?!
- (iii) Conduz a que alguns alunos sejam tentados a cometer o seguinte erro: $| -a | = a, \forall a \in \mathbb{R}$.

Será, talvez, preferível dizer que o valor absoluto de um número positivo ou nulo é ele próprio e o valor absoluto de um número negativo é o seu simétrico.

3. Devia estar $a^0 = 1, \forall a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

De facto, a convenção $a^0 = 1$ resultou da generalização da regra de divisão de potências da mesma base ao caso em que os expoentes são iguais ($a^m : a^m$). Como se sabe, a divisão exige que o divisor seja diferente de zero, isto é, $a^m \neq 0$, ou seja, $a \neq 0$. Ora o quociente de dois números reais iguais e não nulos é 1, donde

$$a^m : a^m = 1 \quad (a \neq 0).$$

Por outro lado, tendo presente a regra referida, devia ser

$$a^m : a^m = a^{m-m} = a^0 \quad (a \neq 0).$$

Portanto

$$a^0 = 1 \quad (a \neq 0).$$

4. Não é verdade que, para toda a concretização de δ em \mathbb{R}^+ , $p = C(\frac{2-3\delta}{5})$ seja um número natural. Serve de exemplo $\delta = 1$. De facto, nesse caso,

$$p = C(\frac{2-3}{5}) \Leftrightarrow p = C(-\frac{1}{5}) \\ \Leftrightarrow p = -1$$

mas p deveria ser um número natural!

A incorrecção desaparece considerando

$$p \geq C(\frac{2-3\delta}{5}).$$

Observação: Por vezes a definição de sucessão convergente apresenta o seguinte aspecto:

$$(u_n \rightarrow a) \Leftrightarrow (\forall \delta \in \mathbb{R}^+, \exists p \in \mathbb{N}: \forall n \in \mathbb{N},$$

$$n \geq p \Rightarrow |u_n - a| < \delta)$$

em que surge $n \geq p$ em vez de $n > p$. Como é óbvio, tal em nada afecta a questão apresentada.

5. Uma tal relação não é necessariamente reflexiva.

Com efeito, $xRy \Rightarrow yRx$ é, por hipótese, uma condição universal, mesmo que xRy o não seja.

Assim, podem existir valores x_0 e y_0 que transformam xRy numa proposição falsa e, portanto, transformam a condição $xRy \wedge yRx \Rightarrow xRx$ numa proposição verdadeira, ainda que x_0Rx_0 seja uma proposição falsa.

Serve de exemplo desta situação a relação binária R definida em $A = \{1,2,3\}$ pelo seguinte diagrama sagital:

Na verdade, R é simétrica e transitiva mas não é reflexiva!

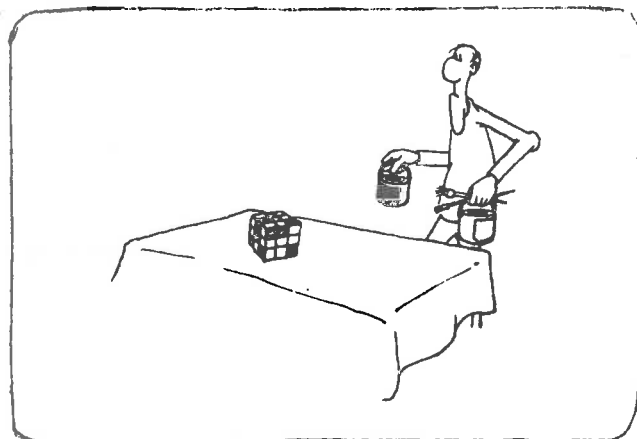
Um exemplo "mais forte" é a relação vazia definida num conjunto $A \neq \emptyset$.

AS MATEMÁTICAS MODERNAS (continuado da pág. 5)

veram nisto sem dúvida um papel nefasto, e portanto também os editores comerciais, que muito ganharam com esta mudança de alto a baixo. (De qualquer maneira, seria desejável que houvesse no Ministério da Educação uma política do livro escolar; deveriam dispensar-se do serviço algumas equipas de Professores do liceu e da universidade, durante um ano, para escreverem livros escolares; e seria preciso que estas equipas fossem bem escolhidas, o que não se afigura evidente!). Voltou-se um pouco atrás, hoje. O ensino das escolas e liceus é ainda demasiado pobre, na parte matemática; estuda-se demasiada teoria dos conjuntos, demasiado pouca tabuada, demasiado pouca geometria, demasiado pouca matemática aplicada a outras disciplinas, mas regrediu-se dos grandes excessos anteriores, e pode-se esperar que se vá para uma boa estabilização; os programas matemáticos dos liceus são bem melhores do que há alguns anos. Mas esta história teve numerosas conseqüências. Ela traumatizou os professores da Escola primária, dos colégios, dos liceus, que tiveram de ensinar "matemáticas modernas", muito abstractas e que eles não conheciam (...) Por outro lado, as crianças das classes laboriosas são tão muito menos preparadas do que as outras para as abstracções, para os raciocínios feitos sobre rectas desenhando batatas; as matemáticas modernas tornam-se assim num instrumento importante de selecção social. Para terminar, elas desacreditaram frequentemente a matemática e os matemáticos num mundo em que a matemática (a verdadeira!) é indispensável, num país em que a matemática é uma das ciências mais florescentes e onde a investigação fez progressos enormes nas últimas décadas.

LAURENT SCHWARTZ

in "La France en Mai 1981 - L'enseignement et le développement scientifique", pgs. 189-191 (La Documentation Française, Paris, Décembre 1981) (trad. J.F.Q.)



FUNÇÕES COM GRAFOS TRANSNORMAIS

por

F.J. Craveiro de Carvalho

(Prof. no Dep. de Matemática da F.C.T.U.C.)

A noção de transnormalidade foi introduzida, num contexto mais geral, por Stewart Robertson [1]. Nesta nota limitar-nos-emos a algumas considerações sobre funções reais de variável real cujos grafos são transnormais.

Seja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^∞ . Considere-se a curva $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $F(x) = (x, f(x))$. É claro que $F(\mathbb{R})$ é o grafo de f . A normal no ponto $(x, f(x))$ ao grafo de f , designado a partir de agora por G , é, por definição, a normal N_x à curva F no ponto x . O grafo G dir-se-á *transnormal* se sempre que $(y, f(y)) \in N_x$ se tiver $N_x = N_y$.

Stewart Robertson provou que se G é transnormal então o número de pontos em que cada normal intersecta o grafo é sempre o mesmo. Esse número é igual a 1. De facto, se existir $x \in \mathbb{R}$ tal que $f'(x) = 0$ então N_x é paralela ao eixo dos y e portanto $N_x \cap G = \{(x, f(x))\}$. Se, por outro lado, $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ for tal que $f' > 0$ ($f' < 0$) então, como veremos adiante, cada normal só intersecta o grafo num ponto. Portanto

G é transnormal sse cada normal intersecta G num único ponto.

Um problema que imediatamente se põe é o de caracterizar as funções cujos grafos são transnormais. Este problema não é tão simples como parece. Indicamos a seguir alguma informação que se pode obter usando processos perfeitamente elementares.

A normal a G no ponto $(x_0, f(x_0))$ tem por equação

$$x - x_0 = (f(x_0) - y) f'(x_0).$$

Se N_{x_0} intersecta G em mais que um ponto então existe $x_1 \in \mathbb{R}$ tal que

$$x_1 - x_0 = (f(x_0) - f(x_1)) f'(x_0).$$

Pelo teorema dos acréscimos finitos existe $c \in [x_0, x_1]$ ou $[x_1, x_0]$, se $x_1 < x_0$, tal que

$$f'(c) \cdot f'(x_0) = -1.$$

Assim pode concluir-se

Se $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é tal que $f' \geq 0$ ($f' \leq 0$) então G é transnormal.

Se $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é tal que $|f'| < 1$ então G é transnormal.

Suponhamos agora que G é transnormal. Seja $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $f'(x_0) > 0$. Definamos

$$g: (x_0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{por}$$

$$g(x) = (x - x_0) - (f(x_0) - f(x)) f'(x_0)$$

A função g nunca se anula e portanto $g > 0$ ou $g < 0$. Uma vez que $g < 0$ implicaria $f'(x_0) < -1$ conclui-se que $g > 0$ é portanto

$$(f(x_0) - f(x)) / (x_0 - x) > -1 / f'(x_0).$$

A conclusão igual se chegaria supondo $x < x_0$. Se $f'(x_0) < 0$ então, de forma análoga, se conclui que, para $x \neq x_0$,

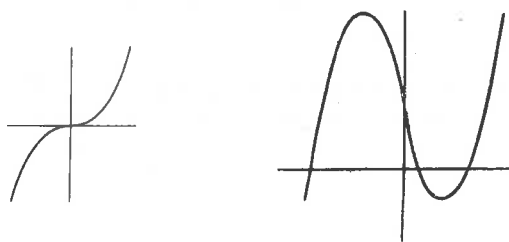
$$(f(x_0) - f(x)) / (x_0 - x) < -1 / f'(x_0).$$

Resumindo

Seja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que G é transnormal. Se $f'(x_1) > 0$ então $(f(x_1) - f(x)) / (x_1 - x) > -1 / f'(x_1)$, $x \neq x_1$. Se $f'(x_1) < 0$ então $(f(x_1) - f(x)) / (x_1 - x) < -1 / f'(x_1)$, $x \neq x_1$.

Utilizando este resultado podemos, por exemplo, concluir que $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = x^2$ não tem grafo transnormal.

Na figura representam-se os grafos de $f(x) = x^3$ que é transnormal e de $f(x) = x^3 - 2x + 1$ que não é transnormal.



Problemas relacionados com a transnormalidade de grafos podem pôr-se para outros tipos de aplicações. Por exemplo, se S^n designar a esfera de dimensão n , centro na origem e raio 1, é possível provar que se $f: S^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, $m \leq n$, tem grafo transnormal então f é constante.

REFERÊNCIAS:

- [1] S.A. ROBERTSON — *Generalized constant width for manifolds*, Michigan Math. J. 11 (1964), 97-105.

*

contacto

Nº 6

MAIO 1982

Organizaram este número: José Machado Gil, João Filipe Queiró, Armando Gonçalves.

Delegação Regional do Centro da Sociedade Portuguesa de Matemática — Departamento de Matemática da F.C.T.U.C. - 3000 - COIMBRA

Os artigos assinados responsabilizam apenas os seus autores.