

*Nas questões de natureza geométrica, recomenda-se a inclusão de uma figura, que pode ser entregue anexa numa folha de rascunho, usada para o efeito e devidamente identificada.*

1. Seja  $ABC$  um triângulo. Sejam  $M$  e  $N$  pontos sobre os lados  $CA$  e  $AB$ , respetivamente, e seja  $O$  o ponto de intersecção de  $BM$  com  $CN$ . Mostre que se  $\overline{OM} = \overline{ON}$  e  $\angle CBM = \angle NCB$ , então  $ABC$  é isósceles.
2. Suponhamos que inicialmente cada uma de  $n$  pessoas tem exatamente uma informação, e que as informações são todas distintas. De cada vez que uma pessoa  $A$  telefona para uma pessoa  $B$ , a pessoa  $A$  diz à pessoa  $B$  todas as informações que possui, enquanto que a pessoa  $B$  nada diz à pessoa  $A$ . Qual é o número mínimo de chamadas entre pessoas de modo a que todos consigam saber tudo?
3. Uma sequência (finita) de inteiros positivos diz-se *completa* se para cada inteiro  $k > 1$  que aparece na sequência, o número  $k - 1$  aparece pelo menos uma vez na sequência antes da última ocorrência de  $k$ . Determine o número de sequências completas de comprimento  $n$ .
4. Um barco tem um furo, pelo qual entra água a um ritmo constante. Quando o furo foi detetado, existia já uma certa quantidade de água acumulada. Sabe-se que a partir desse momento 12 marinheiros gastam 3 horas a bombear a água, até que o barco fique sem água, enquanto que 5 marinheiros gastam 10 horas até se atingir o mesmo objetivo. Os marinheiros têm todos a mesma capacidade. Quantos marinheiros são necessários para que o barco fique sem água em 2 horas?
5. O Guilherme tem um saco opaco de berlindes, com um certo número de berlindes vermelhos e um certo número de berlindes azuis, sendo que tais números podem ser zero. O Guilherme convida o seu amigo Gustavo a retirar de olhos vendados um berlinde. O Gustavo retira um berlinde e mostra-o: é vermelho. O Gustavo retira um segundo berlinde, mas não o mostra. Com que probabilidade o segundo berlinde é vermelho?