

Nas questões de natureza geométrica, recomenda-se a inclusão de uma figura, que pode ser entregue anexa numa folha de rascunho, usada para o efeito e devidamente identificada.

1. Se  $p$  e  $q$  são números primos e  $x^2 - px + q = 0$  tem duas raízes inteiras positivas distintas, determina  $p$  e  $q$ .
2. Determina todas as permutações de  $(a_1, \dots, a_{2013})$  de  $(1, \dots, 2013)$  tais que

$$a_k^2/a_{k+1} \leq k + 2, \quad k = 1, 2, \dots, 2012.$$

3. Escolhem-se 50 números diferentes no conjunto  $\{1, 2, 3, \dots, 100\}$  cuja soma é igual a 2900. Qual é o menor número possível de números pares entre esses 50 números?
4. Seja  $M$  um conjunto de  $n$  pontos do plano  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ , tal que:
  - a. existem 7 pontos em  $M$  que são vértices de um heptágono convexo;
  - b. para quaisquer 5 pontos que sejam vértices de um pentágono convexo, existe um ponto de  $M$  no interior desse pentágono.

Determina o menor valor que  $n$  pode tomar.

5. (a) No último estágio indicámos como escrever o quociente da  $n$ -ésima função elementarmente simétrica sobre a  $(n - 1)$ -ésima função elementarmente simétrica por superposição de duas funções de duas variáveis. Reproduz a prova (de que deixámos uns pormenores como exercício) e diz como é usada para provar a desigualdade de Marcus-Lopes.

- (b) Determinar, com prova, a família de todas as permutações  $\pi$  em  $\{1, \dots, n\}$  tais que para todas as sucessões  $x_1, \dots, x_n$  de reais positivos se tem

$$\frac{x_1^2}{x_1 + x_{\pi_1}} + \frac{x_2^2}{x_2 + x_{\pi_2}} + \dots + \frac{x_n^2}{x_n + x_{\pi_n}} \geq \frac{x_1 + \dots + x_n}{2}.$$

**v.s.f.f.**

## Testa os teus Conhecimentos, Constrói as tuas Capacidades

C0.ab: Expõe com provas um ou dois tópicos Delfos.

C1. Um ictiólogo já há tempos queria saber a distribuição das frequências relativas de carpas, lúcios, e trutas em três lagos 1,2,3 vizinhos. A obtenção de tais dados é custosa, mas quis a sorte que três pescadores amigos mantiveram durante anos o costume diário em que cada um foi a um lago diferente e esperava até que um dos desejados peixes mordesse a isca. Para o jantar conjunto puseram os seu peixes na mesma panela e registaram o seu conteúdo. Contactados, emprestaram os seus registos ao cientista que conseguiu construir a seguinte tabela:

três carpas	duas carpas, um lúcio	uma carpa, dois lúcios	três lúcios	duas carpas, uma truta	um peixe de cada espécie	dois lúcios, uma truta	uma carpa, duas trutas	um lúcio, duas trutas
100	176	89	13	120	156	36	20	20

dizendo, por exemplo, que em 176 dias a panela continha duas carpas e um lúcio, etc. Sendo tu um amigo matemático do ictiólogo, és capaz de dizer-lhe as razões numéricas das espécies que vivem em cada um dos três lagos? Ele gostava de saber qualquer coisa como “num dos lagos os números das carpas, lúcios, e trutas estão aproximadamente nas razões 3:1:5, no outro dos lagos ....” etc.