Nas questões de natureza geométrica, recomenda-se a inclusão de uma figura, que pode ser entregue anexa numa folha de rascunho, usada para o efeito e devidamente identificada.

1. Seja $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ uma função tal que $f(3n) = n^2 + f(3n-3)$, para qualquer $n \geq 1$. Determina $f(15)$.

2. Seja $[ABC]$ um triângulo e D, E, F pontos em $[AB]$, $[BC]$ e $[AC]$, respectivamente. Sejam $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$ e $\mathcal{C}_3$ as circunferências circunscritas a $[ADF]$, $[BED]$ e $[CFE]$, respectivamente. Mostra que as três circunferências são concorrentes num ponto.

3. Num país há 2013 cidades, e entre cada duas delas uma estrada. Em cada estrada opera uma das 10 companhias de autocarros existentes no país, que oferecem viagens de um extremo ao outro da estrada (em ambas as direcções).

   Mostra que independentemente de como as distribuirmos, existirá sempre uma cidade da qual podemos sair e regressar ao fim de um número ímpar de viagens sempre na mesma companhia de autocarros.

   Será o mesmo verdade se existirem 11 companhias?

4. Define um conjunto de 2013 inteiros tal que a soma dos elementos de um qualquer subconjunto não vazio de A não seja potência perfeita.

5. Mostra que $n + \lceil \log_2 n \rceil - 2$ comparações de pesos individuais numa balança farmacêutica são suficientes para determinar o maior e o segundo maior dos pesos num conjunto de n pesos.

v.s.f.f.

Testa os teus Conhecimentos, Constrói as tuas Capacidades

C0ab: Expõe com provas dois temas délficos.

C1: O que diz o critério de Eisenstein?

C2: Existe um método sistemático para transformar todo o polinómio simétrico de várias variáveis num polinómio nos polinómios elementarmente simétricos. Explica como funciona.

C3: Num certo tipo de provador automático de teoremas geométricos usa-se o seguinte como dados fundamentais. Dados pontos A, B, C, D do plano, define-se

AB/CD :=a usual fração de segmentos paralelos ou colineares; só definido nestes casos e se $C \neq D$;

S_{ABC} :=área orientada do triângulo $\triangle ABC$; e a diferença de Pitágoras $P_{ABC} = |AB|^2 + |BC|^2 - |AC|^2$.

A área orientada de $\triangle ABC$ é *definida* como positiva se ao 'correr' de A para B para C para A se corre no sentido do relógio; é zero se A, B, C forem colineares; e é negativa se se correr no sentido contra-relógio.

a. O que se está a dizer com a fórmula lógica $P_{ABA} \neq 0$ & $P_{CDC} \neq 0$ & $S_{ACD} = S_{BCD}$?

b. Expressa de formas análogas as seguintes propriedades através das quantidades dadas:

i. A e B são pontos idénticos. ii. A, B, C são colineares. iii. $AB \perp CD$. iv. $AB||CD$. v. O é ponto médio de AB. vi. $|AB| = |CD|$. vii. Pontos A, B, C, D estão na relação harmónica $H(AB, CD)$. viii. A medida de ângulo $A\hat{B}C = D\hat{E}F$.