Nas questões de natureza geométrica, recomenda-se a inclusão de uma figura, que pode ser entregue anexa numa folha de rascunho, usada para o efeito e devidamente identificada.

1. (a) Sejam n um inteiro positivo, e $f(n)$ o número de soluções (x, y) de $x + 2y = n$, com x, y inteiros não-negativos. Mostre que
$$f(0) = f(1) = 1\,,\ f(n) = f(n-2) + 1\,,\ n = 2, 3, \ldots$$
e determine uma expressão explícita para $f(n)$.

   (b) Determine uma expressão explícita para a função g, que a cada n, inteiro não-negativo, faz corresponder o número de soluções (x, y, z) de $x + 2y + 3z = n$, com x, y e z inteiros não-negativos.

2. Um *primo de Wieferich* é um número primo p tal que p^2 divide $2^{p-1} - 1$. Mostra que um primo de Wieferich não é um primo de Mersenne.

3. Mostra que
$$\prod_{i=1}^{\infty} \frac{1}{1 - yx^i} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^n x^n}{(1-x)\cdots(1-x^n)}.$$

4. Seja P um ponto do interior de $\triangle ABC$, e considerem-se os pontos $X = AP^+ \cap BC$, $Y = BP^+ \cap CA$ e $Z = CP^+ \cap AB$. Decide se entre as quantidades $|AP||BP||CP|$ e $8|PX||PY||PZ|$ existe uma desigualdade universalmente válida.

5. Considera a função $\mathbb{Z}_{\geq 1} \ni n \mapsto l(n) = \mathrm{mmc}(\{1, 2, ..., n\})$. Mostra que dado qualquer $L \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ existe um $n_0 \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ tal que para todos os $n \geq n_0$ se tem $l(n) \geq n^L$. (Ou seja: a funcção $l(n)$ cresce mais rapidamente do que qualquer potência fixa de n.)

v.s.f.f.

Testa os teus Conhecimentos, Constrói as tuas Capacidades

Esta secção é para quem quer consolidar a aquisição de cultura matemática e/ou ver questões do tipo que podem estar em testes universitários. Contém também problemas simples que mesmo assim podem ser engraçadas. Questões a quem quase ninguém respondeu podem ser aqui recicladas.

C0ab: Expõe dois tópicos Delfos com provas.

C1. a. Num teste passado pediu-se neste lugar a prova do seguinte: Seja $\triangle ABC$ um triângulo equilátero, inscrito numa circunferência $\mathcal{C}$. Supõe que os pontos A e $P \in \mathcal{C}$ estão em lados opostos do segmento BC. Mostra que $|AP| = |BP| + |PC|$. (Alguns, poucos responderam. Muito apreciamos o empenho!)

b. Do famoso geómetra suiço Jakob Steiner (1796-1863) conta-se que por vezes tapou os olhos dos seus alunos e pediu-lhes para resolver problemas geométricos 'às cegas'; assim desenvolveriam as imaginação geométrica e espacial. Entre muitas outras coisas descobriu a rede de segmentos de rectas de comprimento total mínimo que liga os quatro vértices dum quadrado. Redescobre a rede! Na prova da minimalidade do mesmo pode ser útil o teorema enunciado na alínea (a).

C2. Constroi todas as permutações $\phi \in S_8$ para os quais

$$\phi \circ \phi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 7 & 1 & 6 & 2 & 8 & 5 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

C3. a. Enuncia o teorema fundamental das recorrências lineares demonstrado na aula passada.

b. Demonstra como corolário desse teorema que para uma sucessão $(f_n)_{n\geq 0}$ de números complexos e um inteiro positivo N são equivalentes as afirmações seguintes.

i. A função geradora $\sum_{n\geq 0} f_n x^n$ é função racional $p(x)/q(x)$ irredutível com polinómios p, q de graus $\deg p < \deg q$ e tal que cada raíz α de q satisfaz $\alpha^N = 1$.

ii. Pode escrever-se $f_n = f(n) = c_0(n) + c_1(n)n + \cdots + c_d(n)n^d$ para algum d inteiro positivo (qual?) e funções periódicas $c_i(.)$ com $c_d \neq 0$.

iii. Para todo o $n \geq 0$, $f(n) = \sum_{i=1}^k p_i(n)\gamma_i^n$, onde cada γ_i satisfaz $\gamma_i^N = 1$, e p_i é polinómio de grau igual à multiplicidade da raiz γ_i^{-1} de q.

C4. Restaura os simbolos perdidos nos lugares $*$ da fórmula $\sin(x) - \sin(y) = * \sin(\frac{x*y}{*}) \cos(\frac{x*y}{*})$ e prova-a.

C5. Sejam $p_0, p_1, ..., p_n$ quaisquer polinómios em $\mathbb{C}[x]$ de graus $0, 1, 2, ..., n$, respectivamente. Mostra que todo o polinómio de grau$\leq n$ é combinação linear de $p_0, ..., p_n$.