Nas questões de natureza geométrica, recomenda-se a inclusão de uma figura, que pode ser entregue anexa numa folha de rascunho, usada para o efeito e devidamente identificada.

1. Determina todos os pares de números naturais primos (p, q) para os quais p^2+q^3 e q^2+p^3 são quadrados perfeitos.

2. Sejam $ABCD$ um quadrilátero cíclico, E o ponto de intersecção das diagonais de $ABCD$ e F um ponto qualquer. As circunferências circunscritas aos triângulos FAC e FBD intersectam-se no ponto G (para além de F). Mostra que os pontos E, F e G são colineares.

3. Determina o menor valor que a seguinte expressão
$$\frac{a+3c}{a+2b+c}+\frac{4b}{a+b+2c}-\frac{8c}{a+b+3c},$$
pode tomar para todo $a, b, c \in \mathbb{R}^+$.

4. Supõe que f é um polinómio mónico em $\mathbb{Z}[x]$ de grau não maior que 37. Mostra que $f^3-12f^2+41f-30$ não tem mais que 41 raízes inteiras distintas.

5. a. Recentemente provámos de três maneiras diferentes um teorema da seguinte forma: se $c(n,k)$ designa o número das permutações em $\{1,2,...,n\}$ com k ciclos, então os $(c(n,k))_{n,k\geq 0}$ satisfazem a recorrência ... e tem-se $\sum_{k=0}^{n} c(n,k)x^k = ...$ Mostra que estás atento nas aulas, reproduzindo o enunciado e uma das provas.
b. Seja $S(n,k)$:=número de partições de $\{1,2,...,n\}$ em k blocos. Mostra que $x^n = \sum_{k=0}^{n} S(n,k)x^{\underline{k}}$.
c. Infere que as matrizes feitas dos números de Stirling dos tipos 1, $s(n,k) = (-1)^{n-k}c(n,k)$, e 2, $S(n,k)$ (entradas nas linha n, coluna k) são inversas uma da outra. Isto é, mostra que para inteiros $n, m \geq 0$ quaisquer se tem $\sum_{k\geq 0} S(n,k)s(k,m) = \delta_{n,m}$.

Testa os teus Conhecimentos, Constrói as tuas Capacidades

C0: Expõe com provas um tópico Delfos da tua escolha.

C1: a. Para uma variável x definem-se em combinatória frequentemente os polinómios $x^{\underline{k}} = x(x-1)\cdots(x-k+1)$ e $x^{\bar{k}} = x(x+1)\cdots(x+k-1)$, onde $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Mostra que entre estes polinómios existe uma relação simples.

b. Tem-se $S(3,2) = 3$, pois $12|3 := \{\{1,2\},\{3\}\}$, $13|2$, $1|23$ são as partições possíveis de $\{1,2,3\}$ em 2 blocos. Qual é a relação entre $S(n,k)$ e o número das aplicações sobrejectivas $\{1,...,n\} \xrightarrow{f} \{1,...,k\}$?

C2: Enuncia e prova a desigualdade de Jensen.

C3: Enuncia e prova o teorema de Ptolemeu.

C4: Enuncia o teorema de Pascal.

** Sugere-se tentar resolver em casa problemas aqui menos bem conseguidos e estudar para coisas como C0,... **