1. Determina todos as potências de 2 com a propriedade de que, após apagarmos o primeiro dígito da sua representação decimal, obtemos uma potência de 2. Um exemplo: se apagarmos 3 em $2^5 = 32$, obtemos 2^1.

2. Quais os inteiros positivos n tais que $x^n + x - 1 = 0$ tem uma raíz complexa de módulo 1?

3. Seja G um grafo conexo de m arestas e n vértices. Sabendo que cada aresta faz parte de um triângulo qual o menor valor que m pode ter (em função de n)?

4. Considera as funções $f : \mathbb{N} = \{1, 2, \ldots\} \to \mathbb{N}$ que satisfazem a seguinte condição
   $$f(m + n) \geq f(m) + f(f(n)) - 1\,,\; m, n \in \mathbb{N}\,.$$
   Determina todos os valores que $f(2013)$ pode tomar.

5. Seja ABC um triângulo acutângulo. Seja F a interseção da reta BC com a perpendicular a esta reta que passa em A, seja G a interseção da reta AC com a perpendicular a esta reta que passa por B e seja H a interseção da reta AB com a perpendicular a esta reta que passa em C. Seja I_1 o incentro do triângulo AGH e I_2 o incentro do triângulo BHF. Mostra que A, B, I_1 e I_2 são concíclicos.

Testa os teus Conhecimentos, Constrói as tuas Capacidades

C0. Expõe com provas um tema à tua escolha.

C1. Expõe com provas outro tema à tua escolha.

C2 a. Sejam $X \xrightarrow{f} Y$ e $Y \xrightarrow{g} Z$ funções bijectivas. Então a composição $g \circ f : X \to Z$ está definida e é bijectiva. Logo existem as inversas de $f, g,$ e $g \circ f$ relativamente à composição. Dá com prova uma fórmula para $(g \circ f)^{-1}$ em termos de f^{-1} e g^{-1}.

b. Um certo sistema de computação simbólica é capaz de calcular dentro de segundos que

$$4 \int_{\sqrt{d^2-1}}^{1} \int_{\sqrt{d^2-x^2}}^{1} \arccos(x/d)\, dy\, dx$$

é igual a

$$2 + d^2 - 4\sqrt{-1+d^2} - 2\left(-2 + \sqrt{-1+d^2}\right)\operatorname{arcsec}(d) + d^2 \operatorname{arcsec}(d)^2 - 2\sqrt{-1+d^2}\operatorname{arcsec}\left(\tfrac{d}{\sqrt{-1+d^2}}\right) - d^2 \operatorname{arcsec}\left(\tfrac{d}{\sqrt{-1+d^2}}\right)^2.$$

No entanto, o sistema nem sempre é capaz de reduzir as fórmulas até à sua forma mais simples. Mostra que a expressão que deu para o integral é igual a

$$(1/4)(8 + (4 - \pi^2)d^2 - (16 + 4\pi)\sqrt{-1+d^2} + (16 + 4d^2\pi)\operatorname{arcsec}(d)).$$

Nota: a função arcsec:$[1, \infty[\to [0, \pi/2[$ é a inversa (relativamente à composição) da função bijectiva $1/\cos : [0, \pi/2[\to [1, \infty[$ (no mesmo sentido em que, por exemplo, $[0, \infty[\ni x \mapsto \sqrt{x}$ é inversa da função $[0, \infty[\ni x \mapsto x^2$).