

1. Seja  $[ABCD]$  um quadrado e  $E$  o ponto médio de  $[AB]$ . Seja ainda  $F$  o ponto de  $[AD]$  tal que  $\widehat{FEC} = 90^\circ$ . Mostra que  $[BCE]$  e  $[ECF]$  são semelhantes.
2. Sejam  $A$ ,  $B$  e  $C$  três pontos de uma circunferência tais que  $\angle ACB$  é obtuso. A corda  $[AB]$  corta a circunferência de diâmetro  $[OC]$  nos pontos  $D$  e  $E$ . Sabendo que  $\overline{AD} = 3$  e  $\overline{DB} = 4$ , determina  $\overline{CD}$ .
3. Dá um processo de construção euclidiana de um triângulo  $\triangle ABC$ , dados os comprimentos da sua mediana  $m_A$  e do seu bissector  $b_A$  pelo vértice  $A$ .
4.  $M$  é um subconjunto de  $\{1, 2, \dots, 15\}$  tal que o produto de quaisquer três elementos distintos de  $M$  não é um quadrado. Determina o número máximo de elementos de  $M$ .
5. Mostra que há infinitos inteiros positivos  $n$  tais que  $n$  divide  $2^{2^n+1} + 1$  e  $n$  não divide  $2^n + 1$ .
6. Determina as funções  $f : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{R}$ , que satisfazem

$$f(a+b+c) + f(a) + f(b) + f(c) = f(a+b) + f(b+c) + f(c+a) + f(0), \quad a, b, c \in \mathbb{Q}.$$

## Testa os teus Conhecimentos, Constrói as tuas Capacidades

**C0.** Expõe com provas um ou dois temas da tua escolha.

**C1.** Dá uma prova elementar de que, dados  $k \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$  e  $a > 1$ , se tem  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^k}{a^n} = 0$ .

**C2.** Mostra que aprendeste aquilo a que não sabias responder neste lugar no teste passado.