1. Para $n = 1, 2, \ldots$ denotemos por $s(n)$ a soma dos dígitos de 2^n. Por exemplo, como $2^8 = 256$, temos $s(8) = 2 + 5 + 6 = 13$.
   Determina os inteiros positivos, n, tais que $s(n) = s(n + 1)$.

2. Encontra todas as soluções $(a, b, c) \in \mathbb{Z}^3$ que satisfazem $1 + 3^a = 7^b + 3^c$.

3. (a) Reproduz a demonstração do teorema de Pappus do estágio passado.
   (b) Dá uma prova (muito elegante!) do teorema de Desargues que utilize 'exactamente' as mesmas ideias.

4. Denotamos por $Stir(n, k)$ os números de Stirling de segunda espécie. Mostra que a sequência $\{\frac{Stir(n,k+1)}{Stir(n,k)}\}_{k=1}^{n-1}$ é estritamente decrescente.

5. Determina todos os triplos (x, y, z) de inteiros positivos tais que

$$\begin{cases} 2xz = y^2 \\ x + z = 1987. \end{cases}$$

6. Determina todas as funções $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ tais que

$$f(f(a) + f(b)) = a + b - 1$$

   para quaisquer $a, b \in \mathbb{Z}$.

continua no verso

Testa os teus Conhecimentos, Constrói as tuas Capacidades

C0. Expõe um tema délfico da tua escolha.

C1. Eis um teste aos teus conhecimentos. Quanto mais sabes 'de cor' tanto melhores as tuas hipóteses na resolução de problemas. Informa-te logo que possível relativamente às perguntas 'directas' seguintes (e outras) a que não sabes responder. Tudo isto (e mais) encontras com provas no Repertório do Délfico.

(a) Se z_1, z_2 são números complexos de módulos r_1, r_2 e argumentos θ_1, θ_2, respectivamente, então podemos expressá-los na forma trigonométrica por ...., e o seu produto por ... .

(b) Se X é um conjunto, então uma relação binária sobre X é ... ; em particular tal relação diz-se uma relação de equivalência se ... . Um bem conhecido exemplo de tal relação é ...

(c) O número das funções injectivas de um conjunto de m elementos para um conjunto de n elementos é ... .

(d) A soma dos ângulos de um n-gono convexo é ....

(e) O teorema de Stewart para triângulos diz ... .

(f) As fórmulas para $\sum_{j=1}^{n} k$, $\sum_{j=1}^{n} k^2$, $\sum_{j=1}^{n} k^3$, em termos de n são ... .

(g) O teorema da irredutibilidade de Eisenstein diz ... .

(h) As duas versões mais conhecidas do teorema fundamental da álgebra são as seguintes: ... .

(i) Um produto de somas pode ser expresso por uma soma de produtos. Em particular, se existirem os elementos a_{ij}, $i = 1, 2, ..., m$, $j = 1, ..., n_i$, num anel comutativo, então $\prod_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n_i} a_{ij} = ...$.

(j) A lei da reciprocidade quadrática diz ... .

(k) O teorema de Pitágoras pode ser demonstrado sem utilização de áreas usando as ideias seguintes: ... .

C2. (a) Como pode ser justificado o axioma que diz que uma projectividade que deixa três pontos de uma recta invariante, deixa todos estes pontos invariantes?

(b) Se uma composição de projectividades que transforma uma recta noutra deixa o ponto de intersecção entre as rectas invariante, então podemos dizer que .... .