1. Sejam $\overline{AD}$ e $\overline{BE}$ alturas de um triângulo $\triangle ABC$. Supondo que $|AE| = 5$, $|CE| = 3$ e $|CD| = 2$, determina $|BD|$.

2. Mostra que se um inteiro $n$ é a soma de três inteiros quadrados, então $n$ não é da forma $4^e(8k+7)$, com $e, k \in \mathbb{Z}$.

3. Um subconjunto $\mathcal{C}$ do plano diz-se *convexo* se, para quaisquer $A, B \in \mathcal{C}$, o segmento de reta $AB$ estiver contido em $\mathcal{C}$.

   (a) Seja $\mathcal{C}$ um subconjunto do plano, convexo, e $O$ um ponto não pertencente a $\mathcal{C}$. Supõe que $P \in \mathcal{C}$ é tal que
   $$\overline{PO} = \min\left\{\overline{QO} : Q \in \mathcal{C}\right\}.$$
   Mostra que $\mathcal{C}$ está contido num dos semiplanos fechados definidos pela reta tangente em $P$ à circunferência de centro em $O$ e raio $\overline{PO}$.

   (b) Sejam $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ dois polígonos convexos. Supõe que $\mathcal{A} \cap \mathcal{B} = \emptyset$. Mostra que existe uma reta, $\mathcal{R}$, que separa $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$, ***i.e.***, tal que $\mathcal{A}$ esteja contido num dos semiplanos **abertos** definidos por $\mathcal{R}$ e $\mathcal{B}$ esteja contido no outro.

4. Considera os inteiros $p_1, p_2, \ldots, p_n$, $n \geq 1$, dois a dois distintos, e seja $f_n$ o polinómio de grau $n$ dado por $f_n(x) = (x-p_1)(x-p_2)\cdots(x-p_n)$.
   Mostra que, o polinómio $g_n(x) = (f_n(x))^2 + 1$ não pode expressar-se como o produto de dois polinómios (não constantes) com coeficientes inteiros.

5. Define uma aplicação bijectiva $\mathbb{Z}^2_{\geq 1} \xrightarrow{f} \mathbb{Z}_{\geq 1}$ por uma expressão $f = f(x, y)$ cujos símbolos são todos retirados do alfabeto $\{x, y, (,)+, -, \cdot, \div, 0, 1, 2, 3, ..., 9\}$.

6. Dados quatro pontos colineares $A, B, C, D$, define-se a *razão de divisão do segmento* $AB$ *por* $C$ como sendo o quociente $AC/BC$ de segmentos orientados, i.e., $\text{rd}(C|AB) = AC/BC$; e a *razão cruzada dos quatro pontos* por $\text{rc}(AB, CD) = \text{rd}(C|AB)/\text{rd}(D|AB)$.

   (a) Sejam $\triangle = \triangle ABC$ um triângulo e $Q_x, Q'_x \in x$ pontos, onde $x = a, b, c$ são os lados. Supondo que $Q_a, Q_b, Q_c$ são colineares, mostra que $Q'_a, Q'_b, Q'_c$ são colineares se e só se se o seguinte produto de três razões cruzadas é igual a 1:
   $$\text{rc}(BC, Q'_aQ_a) \cdot \text{rc}(CA, Q'_bQ_b) \cdot \text{rc}(AB, Q'_cQ_c) = 1.$$

   (b) Deduz o teorema de Menelau como caso especial deste teorema.

7. Determina as soluções inteiras positivas da equação Diofantina $n! + 505 = y^2$.

**v.f.s.f.f.**

# Testa os teus Conhecimentos, Constrói as tuas Capacidades

C0. Expõe com provas um tema da tua escolha.

C1. Desenha quatro rectas $a, b, c, d$ concorrentes num ponto. Intersecta-as com uma outra recta $l$ e define os pontos $X = l \cdot x$, onde $x = a, b, c, d$, e $X$ é a correspondente maiúscula. Determina por medição com a régua a razão cruzada rc$(AB, CD)$. Faz o mesmo com outras rectas $l$. As experiências vão levar-te a uma conjectura. Formula-a.

C2. Seja $\triangle ABC$ um triângulo equilátero, inscrito numa circunferência $\mathcal{C}$. Supõe que os pontos $A$ e $P \in \mathcal{C}$ estão em lados opostos do segmento $BC$. Mostra que $|AP| = |BP| + |PC|$.

C3. Uma famosa polémica (incluindo matemáticos) instalou-se nos Estados Unidos nos meados dos anos setenta quando o apresentador de um concurso, chamado Monty Hall, colocou os participantes (um de cada vez) diante de três portas iguais e lhes disse que por trás de (exactamente) uma delas existe um prémio que iam ganhar se lhe dissessem qual a porta que o esconde. Após um participante ter indicado a porta, Monty Hall costumava abrir uma outra sem prémio e, se o participante quisesse, permitia trocar a porta originalmente escolhida.

Achas que as hipóteses de ganhar o prémio podem ser aumentadas mudando a porta? Se sim, quais são as respectivas probabilidades para quem não muda versus para quem muda?