1. Determina o máximo $n \in \mathbb{Z}^+$ tal que $n^2 + 2$ divide $(n+1)(n^4+2n) + 3(n^3+57)$.

2. Seja $n = (p^2+2)^2 - 9(p^2-7)$, onde p é um número primo. Qual é o mais pequeno valor possível para a soma dos dígitos de n, e para que números primos p tal acontece?

3. Seja p um primo positivo. Prova que existem inteiros x, y tais que $p = x^2 + 2y^2$ se, e só se, $p = 2$, $p \equiv_8 1$ ou $p \equiv_8 3$.

   (Nota: se na tua resolução quiseres aplicar o Teorema de Minkowski, podes usar o facto de que a área da região elíptica $\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} < 1\right\}$ é igual a πab, quaisquer que sejam $a, b \in \mathbb{R}^+$).

4. Encontra o maior número n para o qual é possível construir conjuntos $S_1, S_2, \ldots, S_n$ diferentes dois a dois tais que:

   (a) $|S_i \cup S_j| \leq 2009$ para todo i, j;

   (b) $S_i \cup S_j \cup S_k = \{1, 2, 3, ..., 2013\}$.

5. Seja (a_n) a sucessão de números reais definida por: $a_1 = 1$ e $a_{n+1} = 1 + a_1 a_2 \cdots a_n$, para $n \geq 1$. Mostra que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n} = 2$.

6. Seja $\triangle = \triangle ABC$ um triângulo, e sejam Q_a, Q_b, Q_c três pontos colineares sobre os lados a, b, c de $\triangle$, respectivamente. Se R_a, R_b, R_c são os conjugados harmónicos dos pontos Q_a, Q_b, Q_c relativamente aos vértices de $\triangle$, mostra que as rectas AR_a, BR_b, CR_c concorrem.

7. Considera a forma binária quadrática $f(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2$ de discriminante $\Delta = b^2 - 4ac$. Supondo que $a - b + c > 0$, dá uma expressão E, escrita no alfabeto

$$\{a, b, c, +, -, \cdot, \div, (\,,\,), x+y, \Delta, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\},$$

   tal que, para todos os reais x, y, se tem $f(x,y) \geq E$, e tal que a igualdade seja possível.

v.f.s.f.f.

Testa os teus Conhecimentos, Constrói as tuas Capacidades

C0. Expõe com provas um tema da tua escolha.

C1 a. Demonstra

i) por via axiomática (teoria dos triângulos)

ii) por cálculo vectorial

que as diagonais de um paralelogramo se intersectam nos seus pontos médios.

b. Enuncia e demonstra a desigualdade de Jensen.

C2. Os nossos calendários (existem pelo menos uma dúzia nas várias culturas) tentam algo de impossível: racionalizar o irracional. O *ano tropical médio* tem a duração de 365.242199... dias, sendo um dia a duração entre duas passagens do sol pelo mesmo meridiano. Na sequência deste inconveniente, já em 46 a.C., Júlio César, aconselhado pelo astrónomo alexandrino Sosigenes, introduziu os anos bissextos para repôr a sincronicidade do calendário com as estações do ano. A regra para o cálculo dos anos bissextos não se mostrou suficientemente exacta. Por isso, em 1582, o Papa Gregório XIII promulgou uma nova reforma do calendário, ditando que 'datas de anos que são múltiplos de 4 são bissextos, excepto se são divisíveis por 100; mas se são divisíveis por 400 também são bissextos'. (No calendário gregoriano um ano bissexto tem um dia adicional; o dia 29 de Fevereiro.)

a. Supondo que os anos são dados na forma $100s + y$ com $0 \leq y \leq 99$ escreve uma formula da lógica booleana (usando os conectivos $\wedge, \vee, \neg$, etc., e símbolos de relaçõs e operações) que clarifique o decreto pouco claro do Papa, i.e., que seja verdadeira exactamente quando ele intenciona que se tenha um bissexto.

(Exemplo: dados naturais m, n, a fórmula $(3|m) \vee (4n = m)$ expressa '3 divide m ou m é igual a $4n$'. A fórmula é falsa para $(m, n) = (7, 8)$ mas verdadeira para $(m, n) = (8, 2)$.)

b. Quantos anos bissextos vão exisitir entre agora e o ano Y, e em particular quando $Y = 1.000.000$?