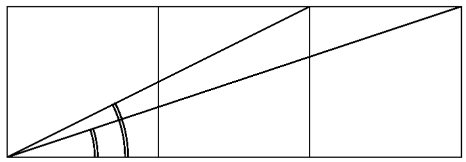
1. Qual é o número mais pequeno que tem 21 divisores e termina em 5?

2. Temos 44 triângulos equiláteros de lado 1, juntamos a estes um triângulo equilátero de lado x e conseguimos com todos estes triângulos cobrir exatamente um triângulo equilátero de lado y. Encontra x e y.

3. A soma dos ângulos que surgem no quadriculado seguinte é, em graus, um número inteiro. Que número é esse? Prova-o.



4. Seja $f_0(x) = 1/(1-x)$, e $f_n(x) = f_0(f_{n-1}(x))$, $n = 1, 2, \ldots$. Calcula $f_{2011}(2001)$.

5. Considera os $2n$ números reais positivos, $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n$. Mostra que se tem sempre uma das seguintes desigualdades:
$$\frac{a_1}{b_1} + \cdots + \frac{a_n}{b_n} \geq n \quad \text{ou} \quad \frac{b_1}{a_1} + \cdots + \frac{b_n}{a_n} \geq n\,.$$

6. Um pirata diz aos seus dois amigos:

   "Quando chegardes à ilha das palmeiras vereis dois faróis. Chamem Maisbela à palma que merece este nome e inspecionem-na de perto. Verifiquem que a Maisbela vê os dois faróis sob ângulo obtuso. Depois separem-se. O Carlos vai para um dos faróis e conta os passos necessários para lá chegar, o Francisco faz o mesmo com o outro farol. Dos faróis olhem uma última vez para a Maisbela e virem-se por noventa graus em tal sentido que o amigo não aparece no campo de visão. Cada um desloque-se agora por tantos passos em linha reta quantos contou atrás e pare. No instante em que o sol esteja no zénite, partam destes sítios indo ao encontro um do outro. Andem com a mesma velocidade. Onde se encontrarem, escavem um buraco. Vão encontrar um saco com o tesouro."

   Mostra que de facto a posição da escavação dos dois não depende da posição da Maisbela.

7. Seja $\triangle = \triangle ABC$ um triângulo e sejam c_X, c'_X, três pares de cevianas passando pelos vértices X, $X = A, B, C$, de tal modo que para cada X o ângulo feito por c_X e c'_X é bissectado pela bissectriz do ângulo $\hat{X}$ de $\triangle$. Mostra que as cevianas c_A, c_B, c_C concorrem se e só se as cevianas c'_A, c'_B, c'_C concorrem.

8. Determina todos os pares de inteiros (x, y) tais que $x^2(y-1) + y^2(x-1) = 1$.

Testa os teus Conhecimentos, Constrói as tuas Capacidades

C1. a. Escreve $\cos(2x) + \cos(3x)$ como polinómio em $\cos x$.

b. Decide se existem inteiros x, y tais que $x^2 + y^2 = 2012$.

c. Expressa o valor extremal de uma função quadrática real $\mathbb{R} \ni t \mapsto at^2 + bt + c$, por uma fórmula em a, b, c. Diz condições necessárias e suficientes para a existência de tal valor.

d. Demonstra a fórmula da somação parcial: para a_i, b_i, $i = 1, 2, ..., n$, complexos e com $B_i = \sum_{l=1}^{i} b_l$, tem-se $\sum_{i=1}^{n} a_i b_i = a_n B_n + \sum_{i=1}^{n-1} (a_i - a_{i+1}) B_i$.

e. Quantas palavras de n letras podem ser formadas com letras do alfabeto $\{a, b, c, d\}$ tais que as letras a, b não são adjacentes?

f. Que caracterização do máximo divisor comum de dois ou mais números inteiros não zeros conheces?

g. Mostra (sem utilização de primos) que para $a, b, m \in \mathbb{Z}_{\neq 0}$, $a \perp m$ e $b \perp m$ implica $ab \perp m$.

h. O que diz o teorema de Fermat Euler? (inclui as definições que entram).

C2. Expõe com provas um ou dois tópicos Delfos.