Detecção e acompanhamento de talentos precoces em Matemática

(comunicação apresentada no encontro "A Matemática e o Ensino", Lisboa, 19 e 20 Abril 1999)

Jaime Carvalho e Silva

Departamento de Matemática, Universidade de Coimbra

http://www.mat.uc.pt/~jaimecs/

A única iniciativa em Portugal que tem vindo consistentemente a popularizar a Matemática e a servir de alguma forma como identificação de talentos em Matemática tem sido a iniciativa da SPM denominada "Olimpíadas Portuguesas de Matemática".

Recentemente tive oportunidade de participar no encontro "Educational treatment of young talent in mathematics" organizado em 20 e 21 de Novembro de 1998 na "Facultad de Matematicas de la Universidad Complutense" pela "Real Academia de Ciencias Exactas, Fisicas y Naturales de Madrid". Aí foram expostas em detalhe várias actividades a decorrer em países tão distintos como Hungria, Alemanha, Estados Unidos e Espanha.

A detecção e acompanhamento de talentos precoces em Matemática (ou noutras áreas) é um problema muito complexo, mas considerado importante num número razoável de países. É difícil definir o que é um jovem matematicamente talentoso, é difícil elaborar instrumentos de detecção de talentos, é difícil desenhar actividades que desenvolvam esses talentos, é difícil encontrar uma progressão escolar em instituições oficiais adequada ao desenvolvimento desses talentos (por exemplo, será que em Portugal seria aceite a entrada na Universidade de alunos com 14-15 anos?).

A diversidade de abordagens dos diferentes países mostra aliás que estão abertas vias muito diversas para a questão. São relativamente conhecidas as "master classes" inglesas. Alguns concursos de problemas de matemática internacionais são bastante populares; refiro por exemplo o "Tournament of Towns" e o "Kangourou des mathématiques". Este último concurso tem entre os seus objectivos:

Les mathématiques sont belles, faciles et intéressantes. Celles et ceux qui les ont rencontrées le savent.Comment faire pour que le plus grand nombre díélèves fasse cette rencontre ?

Para gerir este concurso foi criada a associação "Kangourou sans Frontières/Kangaroo Without Frontiers"que edita também uma série de publicações entres as quais a revista "**Maths & malices**". Em 1997 este concurso envolveu um milhão e duzentos mil alunos de 21 países (entre os quais não está Portugal).

Em Espanha e na Alemanha existem sessões especialmente desenhadas para acompanhar alunos a partir dos 12 anos, e que decorrem aos fins de semana (4 horas por semana no caso de Espanha).

É impressionante a quantidade de revistas de problemas ou de divulgação matemática existente na Hungria; as revistas de ou para alunos são também frequentes em vários outros países. A Hungria é provavelmente o país onde florescem mais competições matemáticas de diversos tipos; muitos outros países organizam competições matemáticas; a nível internacional existem também bastantes (além das Olimpíadas de Matemática, podemos citar a "William Lowell Putnam Mathematical Competition" que nasceu nos Estados Unidos, o "Kangourou des mathématiques" que nasceu em França e o "Tournament of Towns" que nasceu na Rússia).

Talvez a iniciativa mais impressionante seja a do "IAAY-Institute for the Academic Advancement of Youth", uma faculdade da Johns Hopkins University. Este Instituto foi criado por iniciativa de um psicólogo, Julian Stanley, professor dessa universidade, que ficou impressionadíssimo ao tratar nos anos 60 um rapaz de 9 anos que tinha problemas escolares graves; ao fim de umas horas de conversa já estava a discutir matemática com o rapaz ao nível dos exames de admissão ao doutoramento; hoje esse rapaz é um dos principais especialistas de Inteligência Artificial.

O IAAY desenvolve vários tipos de programas. A procura de talentos inicia-se ao nível do 2º ano de escolaridade e inclui programas de Verão e programas de acompanhamento ao longo de toda a escolaridade (uma das iniciativas regulares é a organização de dias especiais de matemática e ciência - como os "**Mathematics and Science Days**"). A ideia básica é desenvolver as capacidades do aluno e fazê-lo interessar-se pela escola sem que ele deixe de estar integrado no ambiente de todos os outros jovens da sua idade. De acordo com a intervenção de William Durden no encontro de Madrid, com este programa os alunos tornam-se mais ousados, mais entusiasmados com o conhecimento, desenvolvem capacidades interdisciplinares, desenvolvem a sua capacidade de associação de conhecimentos, evitam caminhos potencialmente estéreis de uma especialização demasiado estreita. Observe-se contudo que, a partir do momento em que o IAAY começa a acompanhar um aluno, nunca mais o abandona para não criar frustrações; os pais recebem também acompanhamento especial.

Mathematics and Science Days are offered each fall to eighth and ninth graders. Students explore aspects of mathematics and science through hands-on workshops led by prominent and pioneering scientists and mathematicians. Themes for these conferences have included Mind & Brain, Materials Science and Engineering, Biotechnology, Space and Astronomy, Earth and Environment, and Marine Biology. [3]

Este programa é acompanhado do aprofundamento da investigação sobre a natureza dos alunos sobredotados em matemática e noutras áreas. Apesar de o programa do IAAY ter começado na área da matemática, hoje leva a cabo programas em diversas áreas das ciências e das humanidades. Um programa tão vasto não pode ser levado a cabo sem investigação educacional nesta área. Como diz Miguel de Guzmán [7]: "En matemáticas sucede que la enseñanza inicial se basa incorrectamente en algoritmos aritméticos rutinarios de modo que no hay lugar para identificar las aptitudes adecuadas para la matemática propiamente: las habilidades de orden superior. Es necesario identificar con cuidado: hay alumnos que son buenos de ejercicios, van muy bien en las clases, es un placer tenerlos en el aula, hacen con gusto cuanto se les propone... Muy frecuentemente los especialmente dotados para las matemáticas no casan bien en este cliché. Hay que distinguir el estudiante bueno del estudiante especialmente dotado". A dificuldade está em encontrar critérios práticos para distinguir estes alunos. Infelizmente devido à necessidade de um programa, como o do IAAY, de se auto financiar, este programa tomou uma feição muito comercial, que inclui já o lançamento de programas de acompanhamento à distância (com o uso de CD-ROM e Internet) e a tentativa de lançamento de programas noutros idiomas (que levam até à compra de universidades estrangeiras).

Vejamos algo mais do programa do IAAY. As disciplinas oferecidas em cursos de Verão incluem um leque muito variado de assuntos como se pode observar no quadro seguinte:

MATH. Individually Paced Mathematics Sequence
MODL. Mathematical Modeling: Applications
PREC. Topics in Precalculus
REAS. Mathematical Reasoning: Formal Logic and Proof
ADMA. Advanced Mathematical Reasoning
GAME. Probability and Game Theory
THEO. Number Theory
CALC. Calculus -- A Conceptual Approach

O que talvez seja interessante observar é a presença de cursos em matemática discreta e aplicações. Este facto está relacionado com a preocupação do IAAY de não induzir uma especialização demasiado estreita no aluno. É considerado fundamental que o aluno obtenha formação num leque diversificado de áreas. O texto de apresentação do curso de modelação matemática é transcrito a seguir:

MODL. Mathematical Modeling: Applications

Mathematical modeling involves taking real-world problems and situations and representing them in a way that can be studied mathematically. In diverse fields ranging from sports to business and art to politics, formulas and models are ever-present. In this class, students learn to collect and analyze data, predictions, and draw conclusions as they grapple with problems faced by today's mathematicians.

Students use a number of mathematical tools?including functions, graphs, tables, equations, inequalities, and simulations?to work through a wide variety of open-ended problems. They approach these applications-oriented problems individually and in small groups, reflect on their strategies and outcomes, and compare their approaches and solutions with others. By the end of the course, students gain a strong grasp of a number of areas of mathematical inquiry and build a solid foundation for more advanced studies.

Note: Mathematical Modeling is designed primarily for students who have just completed Algebra I. Also, a programmable graphing calculator is recommended for this course, preferably Texas Instruments TI-82 or TI-83.

Texts used in 1998 varied by instructor. Some students used a textbook such as *Excursions in Modern Mathematics*, Arnold and Tannenbaum; or *For All Practical Purposes*, COMAP; while other students used materials compiled by the instructor.

A utilização do livro de texto "For All Practical Purposes" é por demais curiosa pois trata-se de um texto cujo objectivo não é o desenvolvimento de técnicas matemáticas específicas mas sim o contacto com várias áreas de matemática contemporânea para que se entenda melhor o poder e alcance da matemática tal como ela é feita e utilizada actualmente (os autores do texto gabam-se de 80% dos autores citados no livro estarem ainda vivos).

É de esperar que apareçam no programa do IAAY cursos especialmente virados para o raciocínio mais abstracto, mas estes cursos nunca têm uma estrutura expositiva e muito formalizada; o importante é mostrar que a matemática é uma tarefa "artística e criativa". Note-se que o método de trabalho escolhido é o trabalho "em pequenos grupos" em problemas que forneçam desafios.

ADMA. Advanced Mathematical Reasoning

Students in this class are given the opportunity to study mathematics as it truly is: an artistic and creative endeavor. Math is, after all, a type of communication that requires both natural language and elegant arguments. In this course, students are able to branch out and explore new areas of mathematics.

Students learn to prove their answers, rather than just state them. Powerful techniques such as mathematical induction and the pigeon-hole principle are studied in detail. With these new tools, students explore a wide range of topics, including mathematical logic, number theory, graph theory, cardinality, and group theory.

Working in small groups on challenging problem sets, students are exposed to new areas of mathematical inquiry not usually encountered in high school curricula.

Segundo William Durden uma das dificuldades do programa de cursos do IAAY é o recrutamento de professores. O trabalho é normalmente feito em pequenos grupos e o professor deve estar apto a responder às diferentes questões dos alunos e a dar indicações encorajadoras; isto é, o motor do curso é o aluno e não o professor. Poucos professores são recrutados dentre os professores universitários (por desinteresse destes), sendo recrutados nas mais diversas áreas, como a indústria, entre profissionais de áreas exteriores à matemática ou entre alunos de doutoramento.

O programa que está actualmente a ser desenvolvido em Espanha [6] é inspirado mais directamente no programa alemão desenvolvido em Hamburgo por Karl Kiesswetter, Bernhard Zimmermann e Harald Wauner [4]. Esse programa começou com um projecto piloto da "Real Academia de Ciencias Exactas, Fisicas y Naturales de Madrid" intitulado "Detección y estímulo del talento precoz en la Comunidad de Madrid". Foram seleccionados 25 alunos (de entre cerca de 300 alunos com idades entre 12 e 14 anos) através de uma bateria de testes adequados e de uma entrevista; estes alunos frequentam um curso realizado ao longo do ano lectivo aos sábados de manhã (3 horas). O projecto inicial proposto por Miguel de Guzmán em [7] é um pouco diferente. A selecção dos 25 alunos seria feita a partir da sua participação num curso de Verão de 3 semanas organizado à volta de três temas: estratégias de resolução de problemas, álgebra e geometria (para esse cursos seriam seleccionados 60 alunos através de uma bateria de testes). Nas sessões do projecto piloto os alunos são expostos a áreas menos comuns nos programas escolares como combinatória e geometria com computador (é usado o programa Cabri). Em anexo apresentamos a lista de problemas trabalhados numa das sessões. Mais informações sobre o projecto podem ser encontradas na página de Miguel de

Guzmán na Internet http://www.mat.ucm.es/deptos/am/guzman/. Segundo Miguel de Guzmán a ideia é "dirigir y supervisar el trabajo de este grupo introduciéndolo más profundamente en álgebra, geometría y posteriormente en análisis, informática y otras materias adecuadas". Está ainda nas intenções dos organizadores o estabelecimento de "una tutoría personal de cada uno de estos alumnos de modo que pudiera continuarse el contacto con ellos una vez concluído el período de duración del proyecto".

Deverá realmente ser incentivado o apoio a este tipo de alunos mais dotados? Por um lado, é um facto que muitos destes alunos se encontram inadaptados nas escolas e por isso necessitam de apoio especializado. Por outro lado é um erro grave considerar que todos os alunos são iguais; é um erro ainda mais grave que a igualdade de oportunidades, que se deve proporcionar a todos os alunos, passe pelo fornecimento da mesma ementa a todos. Como muito bem assinala Miguel de Guzmán: "una educación ideal debería ser una educación diversificada que, además de estimular un desarrollo armónico de la persona, tuviera en cuenta también las especiales capacidades y aptitudes de cada uno". E mais "la igualdad de oportunidades consiste, a mi parecer, en ofrecer a cada uno las ocasiones más favorables para favorecer el desarrollo de sus capacidades específicas".

Por vezes este tipos de actividades são acusadas de elitistas. Como muito bem esclarece Miguel de Guzmán "se trata mas bien de una acción "antielitista": el sentido común y la experiencia nos dicen que, en caso de que no se proporcione, sin costes para los interesados, una atención de este tipo, los talentos jóvenes especiales que llegarán a su realización pertenecerán a aquellas familias económica y académicamente más elevadas".

As "Olimpíadas Nacionais de Matemática" são uma realização impressionante em Portugal, mas sabem a muito pouco; o "Jornal de Mathematica Elementar" é a única revista em Portugal que tenta, arrostando com inúmeras dificuldades, levar a Matemática aos jovens de forma regular. É pouco.

Penso pois que haveria que criar condições em Portugal para que os nossos talentos matemáticos fossem identificados o mais cedo possível e devidamente acompanhados; num país pequeno como o nosso não nos podemos dar ao luxo de desperdiçar talentos científicos.

Como diz Miguel de Guzmán [7]: "si tratamos de favorecer las capacidades deportivas generales y también las especiales mediante la organización de actividades extraescolares y mediante gimnasios, piscinas, campos de fútbol, organización de clubes específicos,... ¿no deberíamos atender también este otro tipo de capacidades?" até porque "el pleno logro de unos cuantos de estos talentos especiales puede influir muy decisivamente en el futuro científico, tecnológico, matemático,... de nuestra sociedad".

Referências

[1] Center for Talented Youth (CTY), Institute for the Academic Advancement of Youth, *Summer Programs 1998*, The Johns Hopkins University, 1998.

[2] Center for Talented Youth (CTY), Institute for the Academic Advancement of Youth, http://www.jhu.edu/~gifted/cty.html

[3] Institute for the Academic Advancement of Youth (IAAY) - Program Opportunities, http://www.jhu.edu/~gifted/programs.html

[4] Harald Wauner, Bernd Zimmermann, Identification and fostering of mathematically gifted students, *Educational Studies in Mathematics*, 17 (1986) 243-259.

[5] Kangourou sans Frontières, http://www.mathkang.org/

[6] María Gaspar, Miguel de Guzmán, *Un proyecto para la detección y el estímulo del talento precoz en matemáticas en la Comunidad de Madrid*, http://www.mat.ucm.es/deptos/am/guzman/descproy.htm

[7] Miguel de Guzmán, *El tratamiento educativo del talento especial en matematicas*, http://www.mat.ucm.es/deptos/am/guzman/tratatalento/00tratam.htm

Anexo

Actividades 23-01-99 COMBINATORIA

Problema 1. ¿Cuántos números de tres cifras distintas pueden formarse con los dígitos impares?

Problema 2. Un turista debe trasladarse de una ciudad a otra. Para hacerlo puede optar por viajar en avión, autobús o tren, y en cada uno de estos medios puede elegir viajar en primera o en clase turista. ¿De cuántas maneras puede realizar el viaje?

Problema 3. Supongamos que el turista anterior decide visitar cinco ciudades en un determinado orden. Para trasladarse de una a otra tiene, en todos los casos, las mismas opciones que en el problema 2. ¿De cuántas maneras puede realizar el itinerario?

Principio General de Multiplicación

Si una experiencia E1 puede arrojar m resultados distintos, y por cada uno de éstos la experiencia E2 arroja n

resultados, entonces la realización conjunta de E1 y E2 puede arrojar mxn resultados.

Problema 4. Cada uno de los cien asistentes a una reunión recibe un número distinto entre 1 y 100, para que participe en un sorteo que distribuirá tres premios distintos. El mecanismo del sorteo es el siguiente: en un bombo se colocan 100 bolas numeradas de 1 a 100, y en otro tres bolas numeradas de 1 a 3. Se extrae una bola del primer bombo, que indicará el participante favorecido, y luego otra del segundo, que determinará qué premio le corresponde. Con las restantes bolas se realiza este mismo procedimiento dos veces más.

¿De cuántas maneras pueden distribuirse los premios?. ¿Cuántos sorteos distintos puede haber?

Problema 5. En una fiesta se encuentran diez hombres y ocho mujeres. ¿De cuántas maneras diferentes pueden integrarse en parejas para bailar una pieza? (Piensa primero en la solución eligiendo cada mujer su pareja, y después busca la misma solución pero eligiendo cada hombre su pareia).

Problema 6. Un menú del día permite seleccionar un primer plato entre cuatro, un segundo entre tres, y un postre entre cinco.

a.¿De cuántas formas distintas se puede confeccionar una comida?

b. ¿Cuántas comidas diferentes se pueden confeccionar con la condición de que la sopa de pollo y el pollo asado no

aparezcan en el mismo menú?

Problema 7. ¿Cuántos números capicúas de cinco cifras hay? ¿Y de seis cifras?

Problema 8. En el sistema Morse las señales consisten en intervalos cortos (puntos) o intervalos largos (rayas). Cada mensaje es una sucesión de puntos y rayas. ¿Cuántos mensajes diferentes pueden enviarse usando exactamente 5 señales?. ¿Cuántos usando como máximo 5 señales?. ¿Y cuántos usando como máximo diez señales?

Problema 9. Un hotel dispone de 10 habitaciones dobles y seis habitaciones triples. Cierto día recibe a tres matrimonios sin hijos, que ocuparán cuartos dobles, y a dos matrimonios con un hijo cada uno, que se alojarán en habitaciones triples. ¿De cuántas maneras pueden distribuirse las familias en el hotel?

Problema 10. Al ingresar a un colegio, 6 chicas deben optar entre asistir a clase de Inglés o de Francés. ¿De cuántas maneras pueden repartirse, si Susana y Teresa deciden elegir la misma materia y Noemi no quiere compartir su misma elección?

Problema 11. Determina el valor de la suma de todos los números del problema número 1.

Problema 12. De todos los posibles sorteos del problema 4, ¿en cuántos de ellos cada premio aparece en su orden natural?. ¿Y en cuántas de las posibles distribuciones de los premios el señor Fortune obtiene alguno?

Problema 13. ¿Cuántos números naturales menores o iguales que 100.000 no tienen dos cifras consecutivas iguales?

Problema 14. En la mesa de un bar se encuentran sentados cuatro chicos. Cada uno de ellos tomará un refresco a elegir entre las cinco marcas que se ofrecen. ¿De cuántas formas puede hacer el grupo su elección?. ¿Cuántos pedidos distintos puede hacer el camarero en el mostrador?

Problema 15. Seis matrimonios posan en fila para una fotografía. ¿De cuántas maneras pueden colocarse si los miembros de cada pareja deben aparecer juntos?. ¿Y de cuántas formas se pueden colocar si lo hacen en dos filas, tres matrimonios por cada fila?

Principio del palomar (Dirichlet)

1. En un cajón, hay calcetines negros, rojos, azules y blancos. ¿Cuál es el menor número de calcetines que hay que sacar para estar seguros de que hay al menos dos del mismo color?

2. En Cercedilla hay un bosque con 1 millón de pinos. Sabemos que ningún pino tiene más de 600000 agujas. Demuestra que hay dos pinos que tienen exactamente el mismo número de agujas.

3. Pensemos en seis números naturales.¿Podemos asegurar que siempre podremos elegir dos de ellos cuya diferencia sea múltiplo de cinco?

4. En una frutería hay 25 cajas de manzanas. Son de tres tipos, y cada caja tiene manzanas de un mismo tipo. Demuestra que hay al menos nueve cajas que tienen el mismo tipo de manzanas.

5. El pasado fin de semana, en el partido Real Madrid-Atletico de Madrid, había 80000 espectadores.¿Cuántos de ellos, como mínimo, han nacido el mismo día de la semana?

6. Matelandia tiene sólo un aeropuerto, pero tiene 15 equipos de fútbol, con 11 jugadores cada uno. Todos ellos tienen que viajar hoy a Madrid, donde se celebra un campeonato, y no han hecho sus reservas . Salen diez vuelos de Matelandia a Madrid, y cada uno de ellos tiene 15 plazas libres. El jugador Romariov decide que viajará en su helicóptero particular. Demuestra que al menos uno de los equipos podrá llegar completo a Madrid para la competición.

7. Varios equipos de fútbol participan en un torneo, en el cual cada uno de ellos debe jugar con cada uno de los restantes exactamente un partido. Prueba que siempre, durante el torneo, hay dos equipos que, en ese momento, han jugado el mismo número de partidos.

8. Demuestra que ningún triángulo equilátero puede cubrirse con dos triángulos equiláteros más pequeños.

9. ¿Cuál es el mayor número de reyes que podemos colocar en un tablero de ajedrez de modo que no haya dos en posición de mate?

10. A una comida asisten doce personas, que se sientan en una mesa redonda. Delante de cada plato, hay un

cartel con el nombre del comensal, pero ninguno de ellos se sienta en el lugar que le corresponde.

Demuestra que se puede girar la mesa de modo que al menos dos personas estén en su sitio.