

*Nas questões de natureza geométrica, recomenda-se a inclusão de uma figura, que pode ser entregue anexa numa folha de rascunho, usada para o efeito e devidamente identificada.*

1. Quantos inteiros positivos múltiplos de 11 existem com 15 dígitos e com apenas os números 3 e 8 na sua representação decimal?
2. Determine as soluções reais da equação  $(x + 1)(x^2 + 1)(x^3 + 1) = 30x^3$ .
3. Seja  $[ABC]$  um triângulo tal que  $|AB| = 3$ ,  $|AC| = 5$ , e tal que o raio da circunferência inscrita em  $[ABC]$  é igual a 1. Determine os valores possíveis de  $|BC|$ .
4. Considere a sucessão,  $(a_n)$ , de números reais definida por
$$a_0 = 1, a_{n+1} = \frac{7a_n + \sqrt{45a_n^2 - 36}}{2}, n \in \mathbb{N}.$$
Mostre que,  $(a_n)$  é uma sucessão de números inteiros positivos, e que  $a_n a_{n+1} - 1$  é para cada  $n \in \mathbb{N}$  um quadrado perfeito.
5. Um baralho de 32 cartas tem 2 “jokers” diferentes numerados com 0. Há 10 cartas vermelhas, 10 verdes e 10 azuis; para cada cor, as cartas estão numeradas de 1 a 10. Chama-se *mão* a qualquer subconjunto de cartas do baralho. O peso dum carta com o número  $n$ , é  $2^n$ . O peso dum mão é a soma dos pesos das suas cartas. Quantas mãos existem com valor 2014?