

Nas questões de natureza geométrica, recomenda-se a inclusão de uma figura, que pode ser entregue anexa numa folha de rascunho, usada para o efeito e devidamente identificada.

1. Num tabuleiro $3n$ por $3n$, qual é o número máximo de torres que se podem colocar de forma a que cada torre seja atacada no máximo por uma outra torre?
2. Determine as funções $h: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ tais que

$$h(x + y) + h(xy) = h(x)h(y) + 1$$

para quaisquer $x, y \in \mathbb{Z}$.

3. Num triângulo $[ABC]$, a bissetriz do ângulo \hat{A} intersesta $[BC]$ no ponto D . A reta perpendicular a $[AD]$ que passa por B intersesta $[AD]$ no ponto E . A reta paralela a $[AC]$ que passa por E intersesta $[BC]$ em G . Supondo que $|AB| = 26$, $|BC| = 28$ e $|AC| = 30$, qual é o comprimento do segmento DG ?
4. Num retângulo $[ABCD]$ de área 1 consideram-se 5 pontos (que podem estar na sua fronteira). Sabendo que quaisquer 3 desses pontos são não colineares, determine o menor número de triângulos que se podem construir com vértices nos 5 pontos dados e área quando muito igual a $1/4$.
5. Seja a_1 um número natural dado que não é divisível por 5. Definimos a sucessão (a_n) por
$$a_{n+1} = a_n + b_n, n = 1, 2, \dots,$$
onde b_n é, para cada $n \in \mathbb{N}$, o algarismo das unidades de a_n . Mostre que a sucessão (a_n) contém um número infinito de potências de 2.