

Nas questões de natureza geométrica, recomenda-se a inclusão de uma figura, que pode ser entregue anexa numa folha de rascunho, usada para o efeito e devidamente identificada.

1. Determine o número de números entre 2 e 1000 que têm pelo menos uma raiz (quadrada, cúbica ou de maior grau) inteira.
2. Determina os números primos p tais que $5^p + 4p^4$ é um quadrado perfeito.
3. Resolva a seguinte equação por recorrência:

$$f(n) = 7f(n/2) - 6f(n/4),$$

com as condições iniciais $f(1) = 2$ e $f(2) = 7$.

4. Dado um quadrilátero cíclico $[ABCD]$, seja M o ponto médio de $[AB]$ e N a intersecção das diagonais. Sabendo que a recta MN é perpendicular a CD mas não a AB , prova que as diagonais são perpendiculares.
5. Seja $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ uma função multiplicativa e estritamente crescente tal que $f(2) = 2$. Mostre que $f(n) = n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.