

Nas questões de natureza geométrica, recomenda-se a inclusão de uma figura, que pode ser entregue anexa numa folha de rascunho, usada para o efeito e devidamente identificada.

1. Num país existem $2n + 1$ aeroportos. Sabe-se que para qualquer conjunto de n aeroportos existe um outro aeroporto com ligações de ida e volta para todos eles. Mostra que existe um aeroporto no país do qual saem aviões para todos os outros aeroportos.
2. Quantos inteiros pares e ímpares, n , existem tais que n divide $3^{12} - 1$ mas n não divide $3^k - 1$ para qualquer inteiro positivo k menor que 12?
3. Seja $[ABC]$ um triângulo tal que $\overline{AB} = \overline{AC}$. Seja D um ponto no lado $[AC]$ tal que $\overline{AD} < \overline{CD}$, e seja P um ponto do segmento $[BD]$ tal que $\widehat{APC} = 90^\circ$. Sabendo que $\angle ABP = \angle BCP$, determine a proporção $\overline{AD} : \overline{CD}$.
4. Seja π uma permutação do conjunto $[n]$. Dizemos que:
 - (i) π tem uma queda na posição i se $\pi(i) < i$.
 - (ii) π tem um “descent” na posição i se $\pi(i) > \pi(i + 1)$.

Prove que o número de permutações de $[n]$ com k quedas é igual ao número de permutações de $[n]$ com k descents.

5. Determine todas as funções $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tais que

$$f((x - y)^2) = (f(x))^2 - 2xf(y) + (f(y))^2.$$