

O Pentagrama...

5 são os braços da estrela-do-mar e dos dedos da mão,
são 5 as estrelas errantes e há 5 sólidos de Platão.

Caro Leitor,

Desde o tempo do mito ao da racionalidade, para pitagóricos e eleatas, para astrólogos, astrónomos e matemáticos de todos os tempos, para simples mortais como nós, o pentagrama foi e é um símbolo mágico. Para uns está presente no culto de coisas ocultas. Para os matemáticos é mais um símbolo do poder do conhecimento, da imaginação e do raciocínio.

O pentagrama foi o logótipo da Escola Pitagórica. De facto, o símbolo é bem mais antigo: Pitágoras (c. 569 AC c. 475 AC) tê-lo-á trazido do seu périplo pela Babilónia, onde a estrela tinha já um valor místico. Muito se vai dizendo sobre a impossibilidade de comparação racional entre o lado e a diagonal dum quadrado, mas essa fatalidade pitagórica é uma característica marcante do próprio diagrama das cinco pontas. Afinal, a incomensurabilidade que tanto atormentou a Escola esteve sempre pendurada na sua porta de entrada.

Sabia que Kepler descobriu um pentagrama no céu? Vamos explicar onde e como. A figura 1 representa as órbitas da Terra e de Vénus, duas circunferências centradas no centro do Sol. Nesta figura plana, os dois planetas movem-se em redor do Sol, no sentido directo, com velocidade angular uniforme. A Terra descreve a circunferência exterior e o seu movimento angular é mais lento que o de Vénus; dito em números, o período orbital da Terra é 365.256 dias, e o de Vénus 224.701 dias.

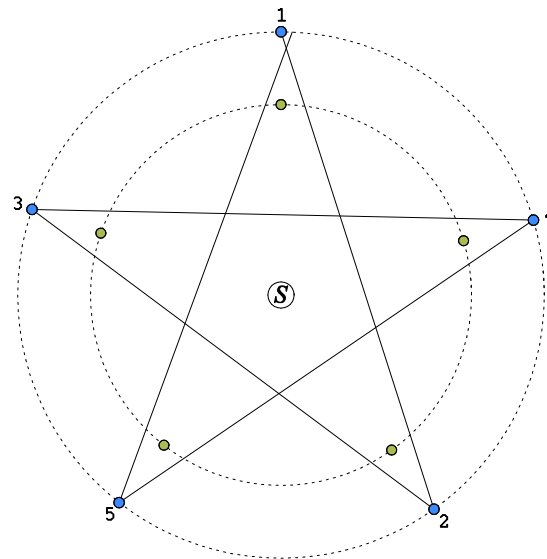


Figura 1

Problema 1

Imagine que, em certo momento inicial, representado por "1" na figura 1, Terra e Vénus estão em conjunção (isto é, Vénus está no segmento que une os centros do Sol e da Terra). Quanto tempo decorrerá até à próxima conjunção?

Só lhe damos a resposta no próximo número, pois queremos que chegue a ela e nos informe disso. Mas damos uma pista geométrica: a conjunção a seguir a "1" ocorre na posição "2", a conjunção seguinte na posição "3", e assim sucessivamente. E lá está o pentagrama: 1-2-3-4-5-6...

Canto Delfico

[O Pentagrama...]

Note o pequeno desvio da posição “6” relativamente à posição “1”. Elas deviam coincidir se os deuses tivessem tido mais cuidado a fazer o mundo.

Problema 2

Quando a Terra chega à posição de conjunção “6”, a que distância angular se está da posição de conjunção “1”?

Kepler sabia bem deste atraso espacial (e avanço temporal) da sexta conjunção Terra-Vénus, que lhe serviu para determinar, com grande rigor, a periodicidade dos trânsitos de Vénus — aqueles momentos mágicos, como o de 8 de Junho de 2004, em que Vénus se vê como bolinha negra atravessando lentamente o disco solar.

São frequentes as visitas de Kepler ao pentágono e ao pentagrama, como ilustra a figura 2 extraída da sua obra *Harmonice Mundi*, de 1619, com três dos seus mosaicos estranhos a que chamou “monstros”, talvez pela aparente irregularidade e a ocorrência de decágonos siameses. É interessante notar como este trabalho de Kepler, com quase quatro séculos de idade, inspirou de forma decisiva a teoria dos mosaicos aperiódicos que Roger Penrose iniciou nos anos de 1970.

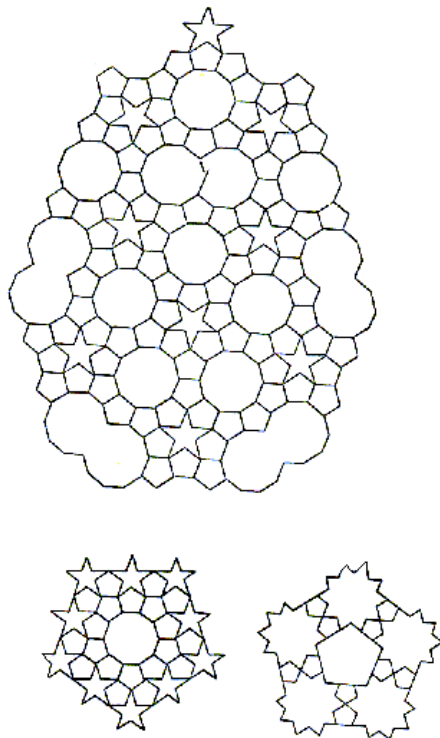


Figura 2

A figura 3 mostra uma sequência de pentágonos e pentagramas regulares.

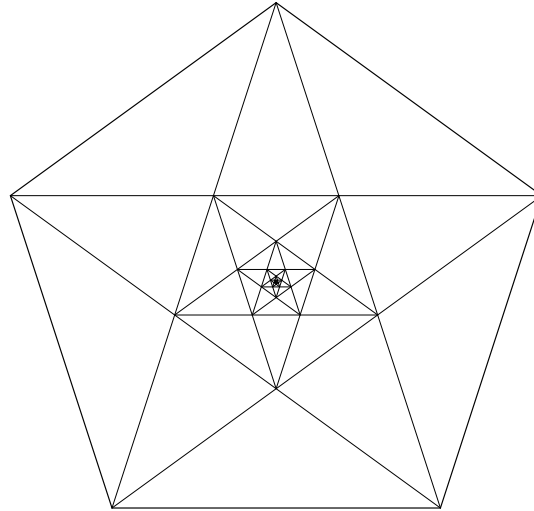


Figura 3

Problema 3

(a) Mostre que cada dois segmentos de recta representados na figura fazem entre si ângulos múltiplos de $\frac{\pi}{5}$.

(b) Mostre que é isósceles cada um dos triângulos desenhados a cheio na figura.

(c) Estão traçados (a cheio, e com extremidades bem identificadas) muitos segmentos de recta. Sejam c_1, c_2, c_3, \dots os comprimentos distintos de todos esses segmentos. Supondo os comprimentos ordenados por ordem decrescente, $c_1 > c_2 > c_3 > \dots$, determine, para cada i a razão $\frac{c_i}{c_{i+1}}$.

Sugerimos que utilize as alíneas (a) e (b) para resolver (c). Pode também utilizar as seguintes dicas na resolução do problema 3, ou, reciprocamente, usar o que digeriu na sua resolução para compreender o que vamos dizer agora. Sejam d_0 e d_1 a diagonal e o lado do pentágono regular maior da figura 3; sejam d_2 e d_3 a diagonal e o lado do segundo maior pentágono regular da figura 3, sejam d_4 e d_5 a diagonal e o lado do terceiro maior pentágono regular da figura 3; etc.. Não é difícil ver que

$$\begin{aligned}d_0 &= d_1 + d_2 \\d_1 &= d_2 + d_3 \\d_2 &= d_3 + d_4 \\d_3 &= d_4 + d_5, \text{ etc., etc..}\end{aligned}$$

Aquilo a que chamamos *divisão inteira de números* pode ler-se geometricamente, à moda dos gregos da Antiguidade: toma-se um segmento S de comprimento d_0 e outro, T , de menor comprimento d_1 ; extrai-se T de S tantas vezes quantas as necessárias para obter, como *resto*, um segmento de comprimento menor que d_1 ; essas “tantas vezes” são o *quociente*.

Como $d_2 < d_1$, a primeira equação representa a divisão inteira de d_0 por d_1 com resto d_2 e quociente 1. E cada uma das restantes equações representa uma divisão. As sucessivas divisões determinam um algoritmo, dito *de Euclides*, mas conhecido muito antes de Euclides. Nesse tempo sabia-se, também, que o facto de um dos restos d_i ser nulo equivale à comensurabilidade dos segmentos de comprimentos d_0 e d_1 . Mas nenhum dos nossos segmentos tem comprimento zero, *ergo*...

Saberia disto Hipaso de Metaponto, o pitagórico da incomensurabilidade entre o lado e a diagonal dum quadrado?

Uma forma interessante de construir um pentágono é tomar uma tira comprida de papel, com bordos paralelos entre si, e fazer com ela um nó de modo a chegar a uma dobragem com o aspecto da figura 4.

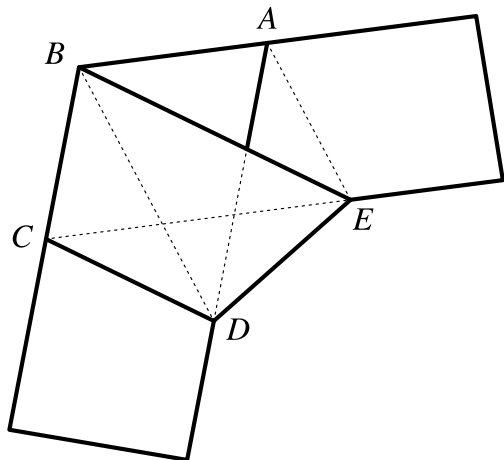


Figura 4

A coisa não é de todo fácil, pois não pode dobrar-se a tira sem mais nem menos, logo no início. Dê um nó bastante lasso e vá puxando as pontas para o apertar; vá calcando o papel assim enrolado sem se comprometer com dobras muito vincadas; puxe e calque mais um pouco, e vá iterando a manipulação até uma dobragem definitiva.

O processo ficará matematicamente completo quando em cada um dos vértices A , C , D , E , convergirem 3 segmentos dos bordos da tira, e no vértice B convergirem 4.

Problema 4

Responda ao seguinte com um argumento rigoroso: será o pentágono $ABCDE$ sempre regular, ou haverá maneira de conduzir o processo manipulativo de modo a obter um pentágono não regular?

De passagem, repare que, na figura 4, o pentágono não é regular!

Vendo o nó à transparência, os bordos da tira desenham um pentagrama e o seu pentágono envolvente, com todos os 10 lados, *excepto um...* nem tudo no mundo é perfeito! \blacksquare

Envie as suas soluções para

Projecto Delfos
Departamento de Matemática
Universidade de Coimbra
3001-454 Coimbra.