Experiência IV: **Geometria**

Objectivo: Nesta subsecção demonstraremos alguns teoremas indispensáveis para a resolução de problemas ligeiramente complexos em que os triângulos e as circunferências desempenham um importante papel.

---

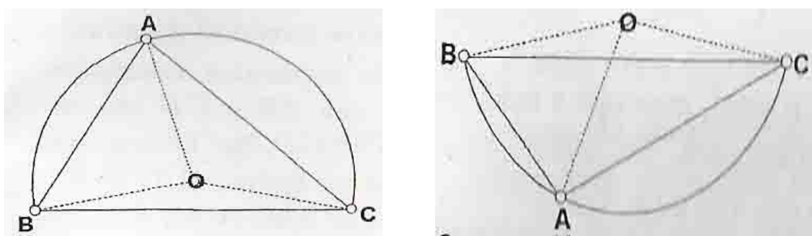
1. Teoremas fundamentais sobre Circunferências e Triângulos

Teorema (do arco capaz). *Seja* $\mathcal{C} = \mathcal{C}(\odot, r)$ *uma circunferência, e sejam* A, B, C *três pontos de* $\mathcal{C}$. *Então*

a. Se A *e* $\odot$ *estão do mesmo lado da recta* g_{BC} *tem-se* $B\hat{A}C = \frac{1}{2} B\hat{O}C$.

b. Se A *e* $\odot$ *estão de lados opostos da recta* g_{BC} *tem-se* $B\hat{A}C = \pi - \frac{1}{2} B\hat{O}C$.

Prova a. Consideremos o caso que $\odot$ está no interior do triângulo $\triangle ABC$. Então este é



(a) (b)

Figura 1. Arco Capaz

repartido em três triângulos isósceles $\triangle A \odot B$, $\triangle A \odot C$, $\triangle B \odot C$. Nos podemos calcular

$$B\hat{A}C = B\hat{A}O + O\hat{A}C \stackrel{1}{=} \frac{1}{2}(\pi - B\hat{O}A) + \frac{1}{2}(\pi - A\hat{O}C) = \frac{1}{2}(2\pi - B\hat{O}A - A\hat{O}C) \stackrel{2}{=} \frac{1}{2} B\hat{O}C\,.$$

□

Aqui usámos em '$\stackrel{1}{=}$' a fórmula 2.1.? , em '$\stackrel{2}{=}$' o facto que a circunferência de raio 1 tem medida do arco 2π. Se $\odot$ estiver no exterior do triângulo $\triangle ABC$ adaptam-se estes cálculos: no caso que B e $\odot$ estiverem de lado opostos da recta g_{AC} tem-se $B\hat{A}C = B\hat{A}O - O\hat{A}C$, no caso de C e $\odot$ estiverem de lados opostos da recta g_{AB}, tem-se $B\hat{A}C = -B\hat{A}O + O\hat{A}C$. Os pormenores deixamos ao leitor.

Prova b. Neste caso vemos dois triângulos isósceles na figura e podemos calcular $B\hat{A}C = B\hat{A}O + O\hat{A}C = \frac{1}{2}(\pi - B\hat{O}A) + \frac{1}{2}(\pi - A\hat{O}C) = \frac{1}{2}(2\pi - B\hat{O}A - A\hat{O}C) = \pi - \frac{1}{2} B\hat{O}C$.
Outra vez temos o que desejámos. □

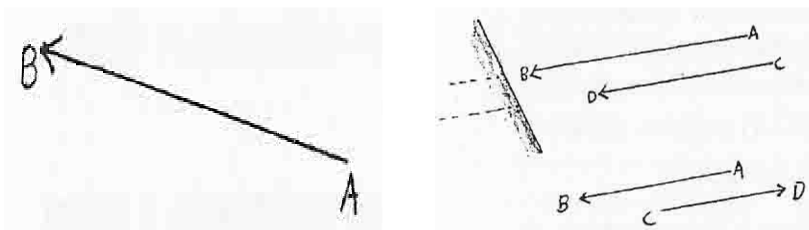
Como $B\hat{O}C$ não depende da posição do ponto A sobre a circunferência, temos a seguinte consequência:

Corolário 1.1. *Um observador* A *que se desloca ao longo de um dos dois arcos definidos por uma corda* BC *duma circunferência vê* BC *sempre sob o mesmo ângulo.*

Exercício 1.1. Um quadrângulo é inscrito (numa circunferência) se e só se a soma de um par de ângulos opostos é π.

Mediante do teorema do arco capaz podemos provar vários outros teoremas importantes. Primeiro algumas definições que nos vão ser úteis em várias ocasiões.

Definição 1.1. Se distinguirmos um dos pontos de um segmento como 'ponta' obtemos o que se diz *segmento orientado* ou *vector aplicado*. Costuma escrever-se $\overrightarrow{AB}$ se B for a ponta. Para tornar a escrita não demasiado pesada prescindimos desta notação: salvo



(a) (b)

FIGURA 2. Segmentos Orientados

excepções usamos a notação AB para designar $\overrightarrow{AB}$, e escrevemos BA se A for ponta. É de sublinhar que AB e BA como segmentos ordinários são iguais, mas como orientados não o são. O contexto impedirá a confusão.

Sejam AB e CD dois segmentos orientados e genuínos. Diremos que AB e CD são *co-orientados*, escrito $AB \upuparrows CD$, se houver um semiplano H^+ tal que as figuras $AB^+ \cap H^+$ e $CD^+ \cap H^+$ ambas são semirectas; diremos que AB e CD são *contra-orientados*, escrito $AB \uparrow\downarrow CD$, se não houver tal semiplano.

Definimos o 'produto' $AB \cdot CD$, e a 'fracção' $\frac{AB}{CD}$, assim:

$$AB \cdot CD = \begin{cases} |AB| \cdot |CD| & \text{se } AB \upuparrows CD \\ -|AB| \cdot |CD| & \text{se } AB \uparrow\downarrow CD; \end{cases} \quad \frac{AB}{CD} = \begin{cases} \frac{|AB|}{|CD|} & \text{se } AB \upuparrows CD \\ -\frac{|AB|}{|CD|} & \text{se } AB \uparrow\downarrow CD. \end{cases}$$

Note-se que cada troca de A, B ou de C, D muda o sinal, mas não o módulo duma fracção ou de um produto de segmentos orientados. Na maior parte das vezes vamos utilizar estes conceitos em casos em que $g_{AB} = g_{CD}$.

Teorema (da corda). *Seja $\mathcal{C} = \mathcal{C}(\odot, r)$ uma circunferência, P um ponto, e g uma recta que intersecta $\mathcal{C}$ em pontos A e B. Então $PA \cdot PB = |\odot P|^2 - r^2$.*

Definição 1.2. O valor $\operatorname{pot}(P, \mathcal{C}) := |\odot P|^2 - r^2$, independente da recta por P escolhida, diz-se *potência* do ponto P relativamente à circunferência.

Prova do teorema. Há que distinguir três casos. Caso: P está no interior de $\mathcal{C}$. Neste caso $|\odot P| < r$ e é claro que $PA \cdot PB < 0$. Introduza se o diámetro de $\mathcal{C}$ por P. Teremos, digamos $A' - \odot - P - B'$, com $A', B' \in \mathcal{C}$. Evidentemente $PA' \cdot PB' = -|PA'| \cdot |PB'| = -(|A' \odot| + |\odot P|)(|\odot B'| - |\odot P|) = -(r + |\odot P|)(r - |\odot P|) = \operatorname{pot}(P, \mathcal{C}) < 0$.

Se $AB = A'B'$, provámos o que queríamos mostrar.

No caso oposto, o corolário 2 garante-nos que $\hat{A} = \hat{A}'$ pois observadores em A e em A' vêem a corda BB' sob o mesmo ângulo. Mas então o teorema da semelhânca AA implica que $\triangle APB' \sim \triangle A'PB$, pois $A\hat{P}B' = A'\hat{P}B$. Consequentemente, $|AP| : |PB'| = |A'P| : |PB|$, e logo $|AP| \cdot |PB| = |PB'| \cdot |PA'|$. Com as observações anteriores feitas, isto significa $PA \cdot PB = \mathrm{pot}(P, \mathcal{C})$, como queríamos mostrar.

Caso: P está no exterior de $\mathcal{C}$. Neste caso $|\odot P| > r$ e é claro que $PA \cdot PB > 0$. Tal como no caso anterior consideremos também neste caso um diámetro $A' - \odot - B' - P$. Calcula-se modificando o raciocínio do caso anterior, que $PA' \cdot PB' = \mathrm{pot}(P, \mathcal{C}) > 0$. De novo temos $\triangle APB' \sim \triangle A'PB$, pois $\hat{A}PB' = \hat{A}'PB$ e $A'\hat{P}B = A\hat{P}B$. A partir daqui aplica-se literalmente o raciocínio do caso anterior, acabando a demonstração deste caso.

Caso: P está sobre $\mathcal{C}$. Este caso simples deixamos ao leitor. □

Os teoremas da congruência, obtidos na secção anterior garantem-nos que, se conhecermos suficientes lados e/ou ângulos dum triângulo, então todos os restantes lados e/ou ângulos estão determinados. Mas esses teoremas não nos dão expressões para calcular das conhecidas as demais grandezas. Os teoremas do seno e do co-seno, demonstrados a seguir 'quantificam' os teoremas da congruência.

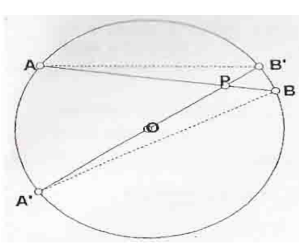
Teorema (dos senos). *Seja $\triangle = \triangle ABC$ um triângulo com circunraio R. Então tem-se*

$$\frac{a}{\sin \hat{A}} = \frac{b}{\sin \hat{B}} = \frac{c}{\sin \hat{C}} = 2R\,.$$

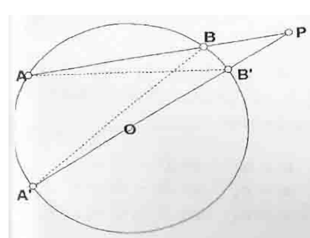
Prova. Evidentemente basta provar que $a/\sin\hat{A} = 2R$. Seja $\odot$:=centro da circunferência $\mathcal{C}$ por A, B, C. Consideremos primeiro o caso em que $\odot$ e A estão no mesmo semiplano-g_{BC}.

Definamos $J = C\odot^{+} \cap \mathcal{C}$. Então $J - \odot - C$ é diámetro. Pelo teorema do arco capaz obtemos em B um ângulo recto: $J\hat{B}C = 90$, pois $J\hat{\odot}C$ é raso; e os ângulos em J e A são iguais: $\hat{J} = \hat{A}$. Logo $\sin\hat{A} = \sin\hat{J} = a/|JC| = a/2R$; e portanto $a/\sin\hat{A} = 2R$ como queríamos mostrar.

Se $\odot$ e A estiverem em semiplanos-g_{BC} opostos, então utilizamos que segundo o teorema do arco capaz se tem $B\hat{A}C = \pi - \hat{J}$, e logo $\sin\hat{A} = \sin(\pi - \hat{J}) = \sin\hat{J}$. De novo obtemos a fórmula desejada. □



(a)



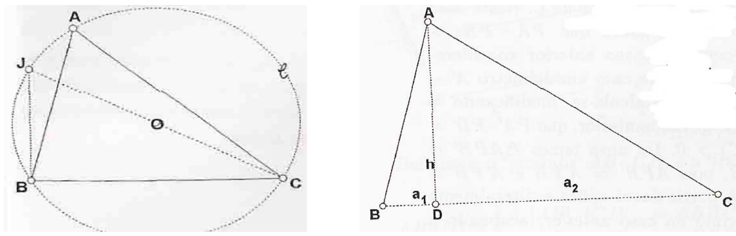
(b)

Figura 3. Teorema da Corda

Teorema (dos cosenos). *Seja $\triangle ABC$ um triângulo. Então tem-se*

$$\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc\cos\hat{A}, \\ b^2 &= a^2 + c^2 - 2ac\cos\hat{B}, \\ c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab\cos\hat{C}. \end{aligned}$$

Prova do teorema da corda. Há que distinguir três casos. Seja $D = \mathrm{pe}(A, g_{BC})$, $a_1 =$



(a) (b)

Figura 4. Teorema dos senos e dos cosenos

$|BD|$, $a_2 = |DC|, h = |AD|$. Com estas definições temos o seguinte

$$a_2 = \begin{cases} a + a_1 & \text{se } D - B - C \\ a - a_1 & \text{se } B - D - C \\ -a + a_1 & \text{se } B - C - D. \end{cases}$$

Assim, escolhendo $(\delta, \epsilon) = (1, 1)/(1, -1)/(-1, 1)$ conforme os três casos considerados, obtemos:

$$\begin{aligned} b^2 &= a_2^2 + h^2 \\ &= (\delta a + \epsilon a_1)^2 + h^2 \\ &= (\delta a + \epsilon a_1)^2 + c^2 - a_1^2 \\ &= a^2 + c^2 + 2\delta\epsilon a a_1 \\ &= a^2 + c^2 + 2\delta\epsilon ac|\cos\hat{B}|. \end{aligned}$$

Observe que só no caso $D - B - C$ se tem $|\cos\hat{B}| = -\cos\hat{B}$ e este caso é também o único em que $\delta\epsilon = 1$. Logo obtemos $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\hat{B}$ em todos os casos. Raciocínio análogo dá as outras fórmulas. □

O teorema da congruência LLL diz nos que um triângulo é completamente determinado pelos seus três lados. Decorre que todas as grandezas determinadas por esta figura, como circunraio, bissectriz de um ângulo, mediana de um lado, área, etc. também dependem apenas dos lados.

Obtenhamos, como exemplo, a área de um triângulo em termos de a, b, c.

Teorema . *Seja $\triangle$ um triângulo com lados a, b, c, e $p = \frac{1}{2}(a + b + c)$ o seu semiperímetro. Então a área de $\triangle$ satisfaz a 'fórmula de Herão'*

$$\text{área}(\triangle) = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

Equivalente é a fórmula

$$16(\text{área}(\triangle))^2 = 2(a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2) - a^4 - b^4 - c^4 .$$

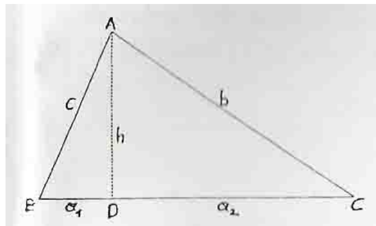


Figura 5. Fórmula de Herão

Prova. Um triângulo tem pelo menos dois ângulos agudos. Podemos supôr que, medidos em radianos, $\hat{B} < \frac{\pi}{2}$ e $\hat{C} < \frac{\pi}{2}$. Com estas hipóteses obtemos para o ponto $D = \text{pé}(A, g_{BC})$, que $D \in BC$, tal como mostra a figura. Definamos $a_1 = |BD|, a_2 = |DC|$. Então $a = a_1 + a_2$, e do teorema de Pitágoras podemos retirar duas expressões para h^2:

$$h^2 = c^2 - a_1^2, \qquad \text{e} \qquad h^2 = b^2 - a_2^2 = b^2 - (a - a_1)^2 = b^2 - a^2 + 2aa_1 - a_1^2 .$$

Por subtração vem $0 = h^2 - h^2 = c^2 - b^2 + a^2 - 2aa_1$, $\quad a_1 = \frac{c^2+a^2-b^2}{2a}$, logo $h^2 = c^2 - \left(\frac{c^2+a^2-b^2}{2a}\right)^2$.

Segundo a conhecida formula área$(\triangle) = ah/2$ obtemos

$$16 \cdot (\text{área}(\triangle))^2 = 16a^2h^2/4 = 4a^2h^2 = 4a^2c^2 - (c^2 + a^2 - b^2)^2,$$

donde resulta a segunda das fórmulas afirmadas. A primeira fórmula decorre desta, elevando as expressões ao quadrado, e escrevendo depois a expressão correspondente do lado direito por extenso. □

A seguir vamos provar um teorema cuja demonstração faz uso do teorema dos senos, e um outro qu faz uso do teorema dos cosenos. Ambos os teoremas, tais como os anteriores são muito úteis em muitas circunstâncias.

Teorema (da bissectriz). *A bissectriz dum ângulo dum triângulo $\triangle ABC$ divide o lado oposto na razão dos lados adjacentes: se, por exemplo, AL for bissectriz do ângulo $\hat{A}$, então $|BL| : |LC| = c : b$.*

Prova. Os senos dos ângulos suplementares $B\hat{L}A = \hat{L}_1$ e $A\hat{L}C = \hat{L}_2$ são iguais. Vamos chamar $\sin L$ a este valor comum. Aplicando o teorema dos senos aos triângulos $\triangle ABL$ e $\triangle ACL$ obtemos

$$\frac{|BL|}{\sin\frac{\hat{A}}{2}} = \frac{c}{\sin L_1} = \frac{c}{\sin L}, \text{ e } \frac{|LC|}{\sin\frac{\hat{A}}{2}} = \frac{b}{\sin L_2} = \frac{b}{\sin L} ,$$

respectivamente. Destas observações decorre imediatamente o teorema. □

Teorema (Stewart). *Seja $\triangle ABC$ um triângulo e $X \in BC$. arbitrary. Então os comprimentos $a, b, c, m = |BX|, n = |XC|, p = |AX|$ satisfazem*

$$amn - ap^2 - b^2m - c^2n = 0\,.$$

Prova. Pelo teorema dos co-senos temos

$$\cos(B\hat{X}A) = \frac{c^2 - p^2 - m^2}{2pm}, \quad \cos(A\hat{X}C) = \frac{b^2 - n^2 - p^2}{2pn}\,.$$

Como os ângulo em X são suplementares - $B\hat{X}A + A\hat{X}C = 180$ - e como a soma dos co-senos de ângulos suplementares é 0, obtemos que a soma das frações é 0:

$$\frac{c^2 - p^2 - m^2}{2pm} + \frac{b^2 - n^2 - p^2}{2pn} = 0.$$

Multipicando a expressão com $2pmn$ obtemos a relação polinomial afirmada. $\square$

Teorema (Menelão). *Seja $\triangle ABC$ um triângulo, e sejam $X \in g_{BC}, Y \in g_{CA}, Z \in g_{AB}$ três pontos. Então*

$$X, Y, Z \text{ estão colineares} \iff \tfrac{BX}{XC} \cdot \tfrac{CY}{YA} \cdot \tfrac{AZ}{ZB} = -1.$$

Prova. $\Rightarrow$: Por hipótese existe $g = g_{XYZ}$. Definamos sobre g os pontos $A' = \mathrm{pe}(A, g), B' = \mathrm{pe}(B, g), C' = \mathrm{pe}(C, g)$. Então reconhecemos as seguintes semelhâncas de triângulos, escritas do lado esquerdo da seguinte tabela.

Estas implicam os correspondentes lados direitos.

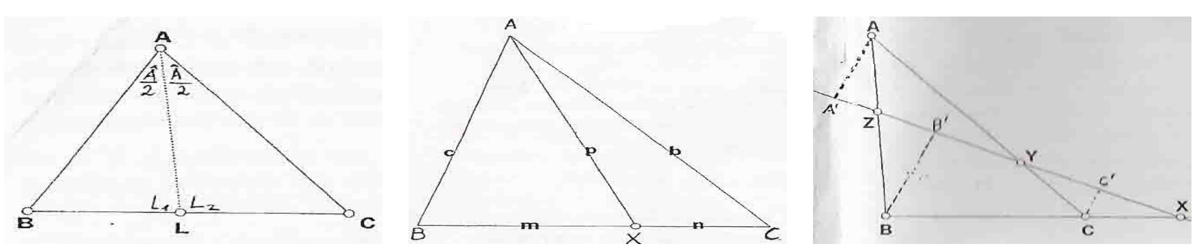
$\triangle BB'X \sim \triangle CC'X$, logo $\frac{|BX|}{|XC|} = \frac{|BB'|}{|CC'|}$,

$\triangle CC'Y \sim \triangle AA'Y$, logo $\frac{|CY|}{|YA|} = \frac{|CC'|}{|AA'|}$,

$\triangle AA'Z \sim \triangle BB'Z$, logo $\frac{|AZ|}{|ZB|} = \frac{|AA'|}{|BB'|}$.

O produto das fracções mais a direita é evidentemente igual a 1.

Isto mostra que $\frac{|BX|}{|XC|} \cdot \frac{|CY|}{|YA|} \cdot \frac{|AZ|}{|ZB|} = 1$. Ora na nossa figura, e de facto em qualquer disposição colinear dos pontos X, Y, Z satisfazendo a hipótese geral existirá, como o leitor pode verificar, sempre ou exactamente um destes pontos ou os trés pontos fora dos seus respectivos segmentos BC, CA, AB. Isto faz com que ou exactamente uma ou todas as



da Bissectriz de Stewart de Menelão

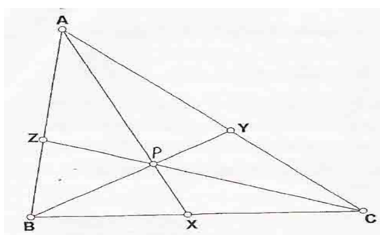
FIGURA 6. Teoremas

três das frações que constam do produto do enunciado é negativo. Logo este produto tem o valor -1 como queríamos demonstrar. $\Leftarrow$: Sejam X, Y, Z três pontos que satisfaçam a hipótese. Então $X \neq Y$ pois doutra forma teríamos $X = Y = C$ e o produto não seria definido. Logo podemos definir uma recta $g = g_{XY}$ a qual deve intersectar g_{AB}, num ponto $Z' \in g_{AB}$. Os pontos X, Y, Z' estão colineares e portanto temos pela implicação já provada que $\frac{BX}{XC} \cdot \frac{CY}{YA} \cdot \frac{AZ'}{Z'B} = -1$. Da hipótese decorre então que $\frac{AZ'}{Z'B} = \frac{AZ}{ZB}$. Mas disto decorre facilmente que $Z = Z'$. □

Se o produto atrás mencionado for igual a $+1$, os pontos X, Y, Z também estão posicionados de forma muito particular.

Teorema (Ceva). *Seja $\triangle ABC$ um triângulo, e sejam $X \in g_{BC}, Y \in g_{CA}, Z \in g_{AB}$ três pontos. Então*

$$\text{Os segmentos } AX, BY, CZ \text{ concorrem} \iff \frac{BX}{XC} \cdot \frac{CY}{YA} \cdot \frac{AZ}{ZB} = +1$$



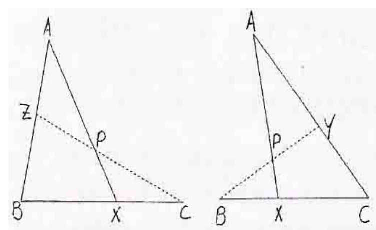


Figura 7. Teorema de Ceva

Prova. $\Rightarrow$: Seja P o ponto da concorrência dos segmentos. Disfarçadas no triângulo vemos duas configurações às quais podemos aplicar aplicar o teorema de Menelão; vejam se as duas figuras auxiliares. Estas dizem-nos: $\frac{BC}{CX}\frac{XP}{PA}\frac{AZ}{ZB} = -1$; e $\frac{BX}{CB}\frac{PA}{XP}\frac{YC}{AY} = -1$; aqui o segundo produto é o recíproco do produto 'standard' obtido pelo teorema de Menelão. Tomando os módulos em todas estas fracções e multiplicando os produtos, cancelam se muitos dos numeradores contra respectivos denominadores, (por exemplo $|BC|$ contra $|CB|$). O resultado é o enunciado formulado com módulos. Na nossa figura cada dos pontos X, Y, Z está já sobre o segmento que define a recta que o contém segundo hipótese, e é claro que $\frac{BX}{XC} = \frac{|BX|}{|XC|}$, etc. donde decorre a conclusão.

Mas o leitor pode verificar que concorrencia dos segmentos sempre implica que ou nenhum ou exactamente dois dos pontos X, Y, Z estão fora dos 'seus' segmentos. Portanto o produto é sempre positivo. Também o raciocínio utilizando o teorema de Menelão fica válido nestes casos em que P está fora do triângulo $\triangle ABC$. Isto conclui a demonstração da presente implicação. $\Leftarrow$: Esta implicação fica a cargo do leitor. Ela utiliza ideias semelhantes aos da respectiva implicação no teorema de Ceva. □