EXPERIÊNCIA IV: **Funções**

Objectivo: Vamos apresentar as funções elementares identidade, potência, exponencial, logaritmo, trigonométricas e hiperbólicas a partir de equações funcionais por elas verificadas. Vamos relembrar os conceitos de números naturais, inteiros, racionais, reais, e introduzir a noção de número complexo, pois somos tocados pela sábia frase de J. Hadamard,

> *o caminho mais curto entre duas verdades no campo real passa com frequência pelo campo complexo.*

Noções de base: números, funções, princípio de indução matemática e trigonometria (cf. Experiência "O Diabo dos Números").

---

1. CLASSES DE NÚMEROS. ALGORITMO DE EUCLIDES

Comecemos por introduzir os conceitos fundamentais a trabalhar nesta secção.

Definição 1.1 (Classes de números).

- O $\{1, 2, \cdots, n, \cdots\}$ é designado por *conjunto números naturais*, e denotamo-lo por $\mathbb{N}$. Os seus elementos são designados por *números naturais*.
- O $\{0, \pm 1, \cdots, \pm n, \cdots\}$ é designado por *conjunto dos números inteiros*, e denotamo-lo por $\mathbb{Z}$. Os seus elementos são designados por *números inteiros*.
- O $\{p/q\,,\ p \in \mathbb{Z}\,,\ q \in \mathbb{N}\}$ é designado por *conjunto dos números racionais*, e denotamo-lo por $\mathbb{Q}$. Os seus elementos são designados por *números racionais*.
- O $\{\alpha\colon \exists\,(u_n) \subset \mathbb{Q} \text{ com } \lim\limits_{n\to\infty} u_n = \alpha\}$ é designado por *conjunto dos números reais*, e denotamo-lo por $\mathbb{R}$. Os seus elementos são designados por *números reais*.

Problema 1.1. $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

Resolução. Suponhamos que não, i.e. $\sqrt{2} = p/q$ para algum $p \in \mathbb{Z}$ e $q \in \mathbb{N}$ com $\text{mdc}(p, q) = 1$. Então, $2q^2 = p^2$, pelo que existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $p = 2k$. Assim, $q^2 = 2k^2$, pelo que q seria também um número par, em contradição com a nossa hipótese $\text{mdc}(p, q) = 1$. $\square$

Problema 1.2. $\sqrt{2} \in \mathbb{R}$.

Resolução. O nosso objectivo vai ser o de encontrar uma sucessão de números racionais que converge para $\sqrt{2}$. Para tal consideramos a igualdade $(\sqrt{2} - 1)(\sqrt{2} + 1) = 1$, i.e. $\sqrt{2} = 1 + \dfrac{1}{1 + \sqrt{2}}$ ou, mais geralmente,

$$\sqrt{2} - 1 = \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \ddots}}.$$

Construímos assim uma sucessão de números racionais $1/2\,,\ 2/5\,,\ \ ,\ 5/12\,,\ \cdots$, i.e

$$u_1 = 1/2\,,\quad u_{n+1} = \frac{1}{2+u_n}\,,\quad n \in \mathbb{N}\,.$$

Se provarmos que a sucessão (u_{2n}) converge para $\sqrt{2}-1$, então a sucessão $(u_{2n}+1)$ convergirá para $\sqrt{2}$. Note-se que, se a sucessão (u_{2n}) tiver limite a, então $a = \sqrt{2}-1$. Basta verificar que a é o único número real positivo tal que $a^2+2a-1=0$.

Agora, vê-se facilmente que $u_n > 0$, $n \in \mathbb{N}$, pelo que $u_{2n} < 1/2$, $n \in \mathbb{N}$, e também que a sucessão (u_{2n}) é crescente. De facto, por definição

$$u_{2n+2} = \frac{1}{2+\dfrac{1}{2+u_{2n}}} = \frac{2+u_{2n}}{5+2u_{2n}}$$

pelo que $u_{2n+2} > (2+u_{2n})/5 > (4u_{2n}+u_{2n})/5 = u_{2n}$, $n \in \mathbb{N}$. Logo (u_{2n}) é convergente e $\sqrt{2}$ é um número irracional. □

Exercício 1.1. Mostre que, primeiro $\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$ e que $\sqrt{3} \in \mathbb{R}$.

Problema 1.3. $\pi \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Resolução. Na secção sobre números algébricos e transcendentes, definimos o número π como o limite da sucessão dos perimetros dos polígonos regulares inscritos numa circunferência de raio $1/2$. Mas esta sucessão não é constituída por números racionais!

Vamos construir uma sucessão que converge para π aplicando o *algoritmo de Euclides* de forma continuada, i.e. $\pi = [\pi] + \{\pi\}$, onde para cada $x \in \mathbb{R}$, $[x]$ é o *maior inteiro não superior a* x e $\{x\}$ é a *parte decimal do número* x. Assim, existe $\alpha_1 > 1$ tal que

$$\pi = [\pi] + \frac{1}{\alpha_1}\,,\quad \text{e portanto}\quad \pi = [\pi] + \frac{1}{[\alpha_1]+\{\alpha_1\}}\,,$$

continuando este processo obtemos uma sucessão de números racionais que converge para o número π. Este processo depende da aproximação considerada para π.

No entanto pode ver-se na porta principal do Departamento de Matemática da Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade de Coimbra que

$$\pi = \lim_{n\to\infty} 4\sum_{k=0}^{n}(-1)^k/(2k+1)\,,$$

e a sucessão das somas apresentada,

$$\left(\sum_{k=0}^{n}(-1)^k/(2k+1)\right)\,,$$

é constituída por números racionais. □

Do processo agora descrito e da análise dos exemplos anteriores, somos levados a intuir que o *algoritmo de Euclides para um número α tem um número finito de passos, quando e só quando α é racional.*

Exercício 1.2. Em termos da decomposição de um número natural, n, em factores primos, determine o número de soluções em $\mathbb{N}$ da equação $xy = n$, bem como a soma de todas a soluções desta equação.

Exercício 1.3. Mostre que $\sqrt[3]{20 + 14\sqrt{2}} + \sqrt[3]{20 - 14\sqrt{2}} \in \mathbb{Q}$.

Exercício 1.4. Mostre que $\sqrt{1 + \sqrt{2 + \cdots + \sqrt{1991}}} < 2$.

2. Funções trigonométricas

Na experiência "O Diabo dos Números", mostrámos que o conjunto dos números naturais tem cardinalidade numerável. Estabelecemos também aplicações bijectivas entre o conjunto dos números naturais, $\mathbb{N}$, e os conjuntos dos números inteiros, $\mathbb{Z}$, ou o conjunto dos números racionais, $\mathbb{Q}$. Assim, estes conjuntos são também numeráveis. Vimos também que não existia uma aplicação bijectiva entre $\mathbb{R}$ e $\mathbb{Q}$ pelo que a cardinalidade de $\mathbb{R}$ é superior à do numerável, dissémos então que $\mathbb{R}$ tem a *potência do contínuo*.

Considere-se agora o produto cartesiano $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ que denotaremos por $\mathbb{R}^2$, que tem como interpretação geométrica o plano OXY. A cada ponto do plano OXY, $P = (x, y)$, fazemos corresponder duas medidas:

- *distância à origem* ou *norma do vector* $\overrightarrow{OP}$, $r = \sqrt{x^2 + y^2}$;
- *ângulo que o vector* $\overrightarrow{OP}$ *faz com a parte positiva do eixo* OX *considerado com sentido positivo*, $\alpha = \angle(\overrightarrow{OP}, OX)$.

Definimos assim uma função bijectiva $T\colon \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to [0, 2\pi[\times \mathbb{R}^+$, com $T(x,y) = (r, \alpha)$. Descrevendo os pontos que se situam sobe a circunferência de centro em O e

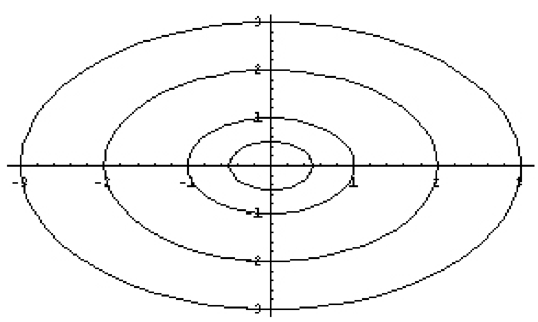

Figura 1. Circunferências concentricas

raio um, $\mathbb{D}$, temos os demais pontos de $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, por homotetias de razão $r \in \mathbb{R}^+$. De facto, $T(\mathbb{D}) = [0, 2\pi[\times \{1\}$ (ver figura 1). Considere-se a função bijectiva, obtida da restrição de T a $\mathbb{D}$, $t\colon [0, 2\pi[\to \mathbb{D}$, com $t(\alpha) = (\cos\alpha, \sin\alpha)$, onde cos e sin são as funções reais definidas por

$$\begin{array}{rccc} \cos: & [0,2\pi] & \to & [-1,1] \\ & \alpha & \mapsto & x \end{array} \qquad \begin{array}{rccc} \sin: & [0,2\pi] & \to & [-1,1] \\ & \alpha & \mapsto & y \end{array}$$

periódicas de período 2π, i.e. $\cos(\alpha + 2\pi) = \cos(\alpha)$ e $\sin(\alpha + 2\pi) = \sin(\alpha)$, $\alpha \in [0, 2\pi[$, e verificam a equação $\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$, $\alpha \in \mathbb{R}$ que corresponde ao Teorema de Pitágoras em linguagem trigonométrica. A representação gráfica destas funções vem dada na figura 2.

Vamos definir a função tangente, $\tan :]-\pi/2, \pi/2[$, por $\tan(\alpha) = \sin\alpha/\cos\alpha$, que é uma aplicação bijectiva entre os conjuntos $]-\pi/2\,,\,\pi/2[$ e $\mathbb{R}$, como pode ser visto da análise da figura 3, por aplicação do teorema de Thales. Esta função estende-se por periodicidade a todo o $\mathbb{R}$, i.e. $\tan(\alpha + \pi) = \tan\alpha$, $\alpha \in]-\pi/2, \pi/2[$. A função inversa da função tangente, que denotaremos por arctan definimo-la por $\arctan : \mathbb{R} \to]-\pi/2, \pi/2[$, com $\arctan(x) = \alpha$.

Estamos em condições de descrever a aplicação inicial T, como sendo a função com expressão analítica $T(x, y) = (r\cos\alpha\,,\, r\sin\alpha)$, onde $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ e $\alpha = \arctan(y/x)$.

Problema 2.1. *Calcule* $\sin(\alpha + \beta)$, $\cos(\alpha + \beta)$ *e* $\tan(\alpha + \beta)$ *em termos das funções* sin, cos *e* tan *em* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Resolução. Vamos restringir-nos, sem perda de generalidade, ao caso em $\alpha, \beta \in]0, \pi/2[$ e $\alpha + \beta < \pi/2$ (ver figura 4). Pode ver-se que os ângulos $\alpha = A\hat{O}B = A\hat{D}B$ pois o ângulo

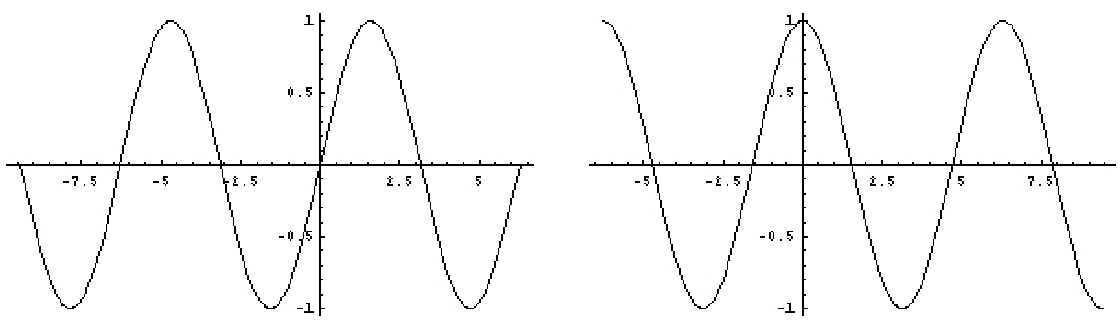

Figura 2. Funções seno e co-seno

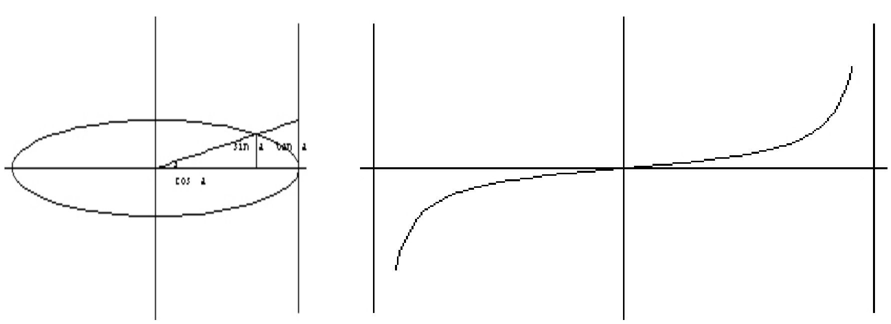

Figura 3. Função tangente

$O\hat{B}D = \pi/2$, donde se tira que

$$\begin{aligned}\sin(\alpha+\beta) &= \frac{\overline{AE}+\overline{ED}}{\overline{OD}} = \frac{\overline{CB}}{\overline{OB}}\frac{\overline{OB}}{\overline{OD}} + \frac{\overline{ED}}{\overline{BD}}\frac{\overline{BD}}{\overline{OD}} = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta \\ \cos(\alpha+\beta) &= \frac{\overline{OC}-\overline{AC}}{\overline{OD}} = \frac{\overline{OC}}{\overline{OB}}\frac{\overline{OB}}{\overline{OD}} - \frac{\overline{BE}}{\overline{BD}}\frac{\overline{BD}}{\overline{OD}} = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta\end{aligned}$$

Tendo em atenção as fórmulas deduzidas temos que

$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta}$$

donde dividindo ambos os membros por $\cos\alpha\cos\beta$ se tira que

$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}\,, \quad \alpha,\beta\in\,]0,\pi/2[\setminus\{\pi/4\}\,,$$

e que mais uma vez se estende a $\mathbb{R}$. □

Exercício 2.1. Calcule $\cos 2\alpha$, $\sin 2\alpha$, $\cos 3\alpha$, e $\sin 3\alpha$ em termos de $\cos\alpha$ e $\sin\alpha$.

Exercício 2.2. Mostre que:

(a) $2\sin([1+1/2+\cdots+1/2^{n-1}]\pi/4) = 2\cos(\pi/2^{n+1}) = \sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}$

(b) $2\sin([a_1+a_1a_2/2+\cdots+a_1\cdots a_n/2^{n-1}]\pi/4) = a_1\sqrt{2+a_2\sqrt{2+\cdots+a_n\sqrt{2}}}$ onde $(a_k)\subset\{-1\,,\,1\}$.

Indicação: Mostre que $2\sin(\alpha/2) = \sqrt{2-2\cos\alpha}$, $\alpha\in\,[0,\pi/2]$.

Exercício 2.3. Mostre que, para todo o $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ temos:

$$\begin{aligned}\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta) &= 2\cos\alpha\cos\beta \\ \cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta) &= 2\sin\alpha\sin\beta \\ \sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta) &= 2\sin\alpha\cos\beta\,.\end{aligned}$$

Exercício 2.4. Sendo $x=\tan(\alpha/2)$, mostre que

$$\cos\alpha = \frac{1-x^2}{1+x^2}\,,\quad \sin\alpha = \frac{2x}{1+x^2}\,,\quad \tan\alpha = \frac{2x}{1-x^2}\,,\quad x\neq\pm1\,.$$

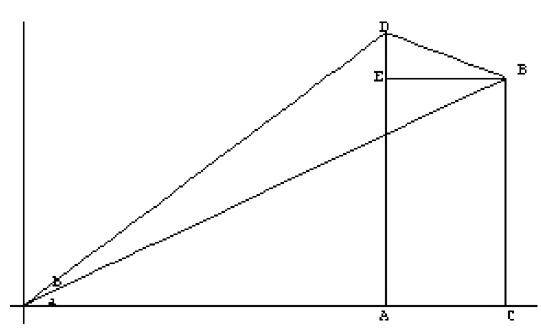

Figura 4. Semelhança de triângulos

Exercício 2.5. Seja $\alpha, \beta, \gamma \in]0, \pi/2[$.

(a) $\tan\alpha + \operatorname{cotan}\alpha \geq 1$, onde $\operatorname{cotan}\alpha = 1/\tan\alpha$

(b) Sendo $\alpha + \beta + \gamma = \pi$, determine

$$\min\left(\tan(\alpha/2) + \tan(\beta/2) + \tan\gamma/2\right) \quad \text{e} \quad \max\left(\tan(\alpha/2)\tan(\beta/2)\tan\gamma/2\right) .$$

Exercício 2.6. Sabendo que f é uma função real de variável real que verifica

$$f(\tan(2x)) = \tan^4 x + \operatorname{cotan}^4 x\,, \quad x \in]-\pi/4, \pi/4[\,,$$

determine a expressão analítica de f.

3. Função exponencial e logarítmica

Vamos introduzir as funções identidade, linear, potência, exponencial e logaritmo a partir de equações funcionais por elas verificadas. Nesta secção faremos uso do pincipio de indução matemática e das classes de números apresentadas no inicio desta experiência.

Problema 3.1. *A única aplicação bijectiva, f, de $\mathbb{Q}$ em $\mathbb{Q}$, que verifica*

$$f(x+y) = f(x) + f(y) \quad e \quad f(xy) = f(x)f(y)$$

é a identidade, i.e. o único automorfismo de $\mathbb{Q}$ em $\mathbb{Q}$ é a identidade.

Resolução. Comecemos por ver que $f(0) = 0$. De facto, $f(x+0) = f(x) + f(0)$. Daqui se conclui que $f(x) = -f(-x)$ para $x \in \mathbb{Q}$, pois $f(x-x) = f(x) + f(-x)$.

Agora, como f é sobrejectiva, existe um elemento $a \in \mathbb{Q}$ tal que $f(a) \neq 0$. Assim, $f(a) = f(a)f(1)$, e portanto, $f(1) = 1$.

Como f é injectiva, se $x \neq 0$ então $f(x) \neq 0$, e portanto, $f(1) = f(x)f(1/x)$. Temos então que $f(1/x) = 1/f(x)$, $x \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ e também

$$f(y/x) = f(y)/f(x)\,,\ y \in \mathbb{Q}\,,\ x \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}\,.$$

Vemos assim que definindo esta aplicação em $\mathbb{N}$, fica definida por esta última propriedade em todo o $\mathbb{Q}$.

Pode ver-se, aplicando o princípio de indução matemática, que $f(n) = n\,,\ n \in \mathbb{N}$ (exercício). Pelo que f fica definida em $\mathbb{N}$, e como $f(-n) = -f(n)$, $n \in \mathbb{N}$, f fica definida no conjunto dos números inteiros.

Como para cada elemento de $\mathbb{Q}$, x, existe $p, q \in \mathbb{Z}$ tal que $x = p/q$, com $\mathrm{mdc}(p,q) = 1$, temos $f(x) = f(p/q) = f(p)/f(q) = p/q = x\,,\ x \in \mathbb{Q}$. □

Problema 3.2. *A expressão analítica da função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, limitada sobre intervalos de $\mathbb{R}$ verificando*

$$f(x+y) = f(x)f(y)\,, \quad e \quad f(1) = a\,, \quad com \quad a > 1\,,$$

é $f(x) = a^x$.

Resolução. Demonstremos por indução que $f(n) = a^n$, $n \in \mathbb{N}$.

Por definição $f(1) = a$. Formulemos a hipótese $f(k) = a^k$ para $k = 1, \cdots, n$, e verifiquemos que $f(n+1) = a^{n+1}$. De facto,

$$f(n+1) = f(n)f(1) = a^n a = a^{n+1} .$$

Agora, $f(0) = 1$, pois $f(1+0) = f(1)f(0)$.

Estamos em condições de definir a função em $\mathbb{Z}$. De facto, $f(p + (-p))) = f(p)f(-p)$, pelo que $f(-p) = (f(p))^{-1}$. Assim, $f(n) = a^n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Para definirmos f sobre $\mathbb{Q}$, vamos começar por dar significado a $f(1/q)$ com $q \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$. Assim,

$$f(1) = f(\underbrace{1/q + \cdots + 1/q}_{q \text{ vezes}}) = (f(1/q))^q \;\Rightarrow\; f(1/q) = a^{1/q} ,$$

e portanto,

$$f(p/q) = f(\underbrace{1/q + \cdots + 1/q}_{p \text{ vezes}}) = (f(1/q))^p \;\Rightarrow\; f(p/q) = a^{p/q} , \quad p \in \mathbb{Z} , \quad q \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} ,$$

i.e. $f(r) = a^r$, $r \in \mathbb{Q}$.

Consideremos agora a função real de variável real com expressão analítica $F(x) = f(x)/a^x$. Note-se que F assim definida é limitada sobre intervalos de $\mathbb{R}$. Além disso, para todo o $r \in \mathbb{Q}$

$$F(x+r) = \frac{f(x+r)}{a^{x+r}} = \frac{f(x)}{a^x}\frac{f(r)}{a^r} = F(x) ,$$

pois $F \equiv 1$ sobre $\mathbb{Q}$.

Se $F(x) = \lambda$ com $\lambda > 1$, então para $m \in \mathbb{N}$ temos $F(mx) = (F(x))^m$, e F não seria limitada, logo $\lambda = 1$ e $F \equiv 1$ em $\mathbb{R}$. $\square$

Exercício 3.1. Caracterização das funções:

Linear: Seja f uma função real de variável real limitada sobre inervalos de $\mathbb{R}$, verificando $f(x+y) = f(x) + f(y)$, $x, y \in \mathbb{R}$. Mostre que $f(x) = ax$, $x \in \mathbb{R}$, onde $a = f(1)$.

Logaritmo: Mostre que a expressão analítica da função $f\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ limitada sobre intervalos de $\mathbb{R}$ verificando

$$g(xy) = g(x) + g(y) , \quad \text{e} \quad g(a) = 1 , \quad \text{com} \quad a > 1 ,$$

é $g(x) = \log_a x$.

Indicação: Mostre que a função $h \equiv g \circ f$ com f função do problema 3.2, é linear e $h(1) = 1$, logo h coincide com a função identidade sobre $\mathbb{R}$.

Potência: Seja f uma função real definida sobre $\mathbb{R}^+$ limitada sobre inervalos de $\mathbb{R}$, verificando $f(xy) = f(x)f(y)$, $x, y \in \mathbb{R}$. Mostre que $f(x) = x^a$, $x \in \mathbb{R}^+$, para algum $a \in \mathbb{R}$.

Exercício 3.2. Resolva as seguintes equações e sistemas de equações exponenciais, em $\mathbb{R}$ e $\mathbb{R}^2$, respectivamente:

(a) $2^{2+x} - 2^{1-x} = 8$
(b) $2^x + 4^x = 272$
(c) $3^{2^x} = 2^{3^x}$
(d) $3^x 5^y = 2^{2x+1} + 2^{2x-1}$, $\quad 3^y 5^x = 2^{2x+2} + 2^{2x-2}$
(e) $x^y = y^x$, $\quad y = 3x$.

4. Números Complexos ($\boldsymbol{i}$Números)

Definimos o *conjunto dos números complexos*, $\mathbb{C}$ como

$$\mathbb{C} = \{a + \boldsymbol{i}\, b\,, \quad a, b \in \mathbb{R}\}\,, \quad \text{onde} \quad \boldsymbol{i}^2 = -1\,,$$

com as operações adição, $+$, e multiplicação, $.$,

$$(a_1 + \boldsymbol{i}\, b_1) + (a_2 + \boldsymbol{i}\, b_2) = (a_1 + a_2) + \boldsymbol{i}\,(b_1 + b_2)$$
$$(a_1 + \boldsymbol{i}\, b_1)\,.(a_2 + \boldsymbol{i}\, b_2) = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + \boldsymbol{i}\,(a_1 b_2 + a_2 b_1)\,,$$

onde $a_1 + \boldsymbol{i}\, b_1\,,\ a_2 + \boldsymbol{i}\, b_2 \in \mathbb{C}$. Pode ver-se que $0 + \boldsymbol{i}\ 0$ é o elemento neutro de $\mathbb{C}$ relativamente à adição, $a - \boldsymbol{i}\, b$ é o simétrico de $a + \boldsymbol{i}\, b \in \mathbb{C}$ relativamente à adição, $1 + \boldsymbol{i}\ 0$ é o elemento unidade de $\mathbb{C}$ relativamente à multiplicação e que $(a - \boldsymbol{i}\, b)/(a^2 + b^2)$, é o inverso relativamente à multiplicação do elemento $a + \boldsymbol{i}\, b \in \mathbb{C} \setminus \{0 + \boldsymbol{i}\ 0\}$.

Além disso, $\mathbb{C}$ foi construido como o conjunto imagem da função $u\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$, onde $u(a, b) = a + \boldsymbol{i}\, b$. Vemos assim que os seus elementos têm uma interpretação geométrica simples (ver secção sobre funções trigonométricas), i.e. $z = a + \boldsymbol{i}\, b \in \mathbb{C}$ escreve-se como

$$z = r(\cos\alpha + \boldsymbol{i}\,\sin\alpha)\,, \quad \text{onde} \quad r = \sqrt{a^2 + b^2}\,, \quad \alpha = \arctan b/a \in\ [0, 2\pi[\,.$$

Problema 4.1. *Mostre que a função $E: [0, 2\pi[\to \mathbb{D}$, com $E(\alpha) = \cos\alpha + \boldsymbol{i}\,\sin\alpha$ e $E(\pi) = -1 + \boldsymbol{i}\ 0$, verifica a condição $E(\alpha_1 + \alpha_2) = E(\alpha_1)\,.\,E(\alpha_2)$, $\alpha_1, \alpha_2 \in [0, 2\pi[$.*

Observação . Comecemos por notar que E está definida em $\mathbb{R}$, e é periódica de período 2π. Agora, do problema 3.2 concluímos que E é uma exponencial que denotaremos por $E(\alpha) = e^{\boldsymbol{i}\,\alpha}$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

Indicação. Identifique a função $E(\alpha_1 + \alpha_2)$ e aplique as fórmulas deduzidas no problema 2.1. □

Daqui tiramos a *representação trigonométrica de um número complexo*, i.e. $z = a + \boldsymbol{i}\, b$ escreve-se como

$$z = re^{\boldsymbol{i}\,\alpha}\,, \quad r = \sqrt{a^2 + b^2}\,, \quad \alpha = \arctan b/a \in\ [0, 2\pi[\,.$$

Além disso, temos

$$\cos\alpha = \frac{e^{\boldsymbol{i}\,\alpha} + e^{-\boldsymbol{i}\,\alpha}}{2}\,, \quad \sin\alpha = \frac{e^{\boldsymbol{i}\,\alpha} - e^{-\boldsymbol{i}\,\alpha}}{2\,\boldsymbol{i}}\,, \quad \alpha \in \mathbb{R}\,.$$

Exercício 4.1. Calcule os valores das seguintes raízes de números complexos:

$$\sqrt[8]{1}\,, \quad \sqrt[3]{-2 + \boldsymbol{i}\ 2}\,, \quad \sqrt[5]{-4 + \boldsymbol{i}\ 3}\,.$$

Exercício 4.2. Sejam $z_0 = 1$, z_1, $\cdots$, z_{n-1} os n vértices de um polígono regular inscrito numa circunferência de centro $0 + \boldsymbol{i}\, 0$ e raio 1. Mostre que

$$(z_0 - z_1)(z_0 - z_2)\cdots(z_0 - z_{n-1}) = n\,.$$

5. Funções hiperbólicas

Definimos as funções *seno, co-seno e tangente hiperbólicas* como as funções reais de variável real sinh, cosh e tanh com expressão analítica

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}\,, \quad \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}\,, \quad \tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}\,,$$

respectivamente. A sua representação gráfica pode ser vista na figura 5. Vê-se assim, que

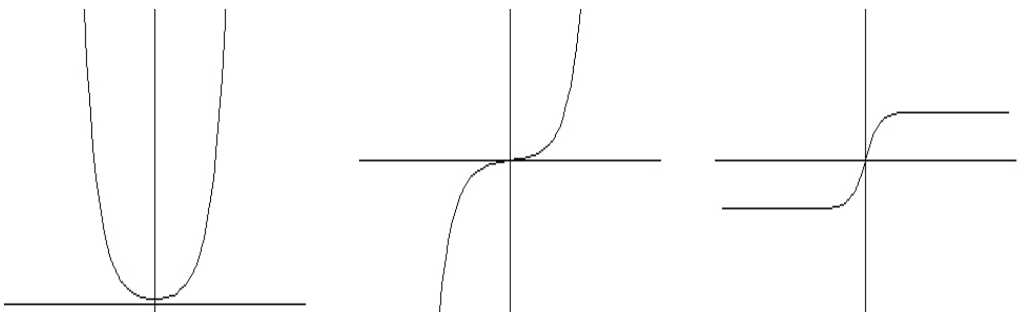

Figura 5. Funções co-seno, seno, e tangente hiperbólicas

as funções sinh e tanh são ímpares e monótonas, e a cosh é par. Assim, as funções sinh e tanh são funções invertíveis em todo o seu domínio e a função cosh é invertível em $\mathbb{R}^+$ ou em $\mathbb{R}^-$, i.e. podemos definir as funções reais arg sinh, arg cosh e arg tanh, inversas respectivamente de sinh, cosh e tanh, definidas em $\mathbb{R}$, $[1, +\infty[$ e $]-1, +1[$ por

$$\arg\sinh x = \log_e(x + \sqrt{x^2+1})\,, \quad \arg\cosh x = \log_e(x + \sqrt{x^2-1})\,,$$

e $\arg\tanh x = 1/2 \log_e(1+y)/(1-y)$. De facto, temos somente que resolver as equações exponenciais

$$y = (e^x - e^{-x})/2\,, \quad y = (e^x + e^{-x})/2\,, \quad y = (e^x - e^{-x})/(e^x + e^{-x})$$

e ter em atenção que $y + \sqrt{y^2-1} = 1/(y - \sqrt{y^2-1})$.

Exercício 5.1. Sendo $y = \tanh(x/2)$, mostre que

$$\cosh x = \frac{1+y^2}{1-y^2}\,, \quad \sinh x = \frac{2y}{1-y^2}\,, \quad \tanh x = \frac{2y}{1+y^2}\,, \quad y \neq \pm 1\,.$$

Exercício 5.2. Mostre que:

(a) $\sinh(x+y) = \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y$
(b) $\cosh(x+y) = \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y$
(c) $\tanh(x+y) = \dfrac{\tanh x + \tanh y}{1 + \tanh x \tanh y}$
(d) $\cosh(x+y) + \cosh(x-y) = 2\cosh x \cosh y$

(e) $\sinh(x+y) + \sinh(x-y) = 2\sinh x \cosh y$.

Exercício 5.3 (Problema Geométrico). Mostre que o problema de determinar o mínimo de

$$(u-v)^2 + (\sqrt{2-u^2} - 9/v)^2\,, \quad \text{com} \quad (u,v) \in \mathbb{R}^2\,,$$

é equivalente a determinar a distância entre a circunferência de equação $x^2 + y^2 = 2$ e a hipérbole de equação $xy = 9$. Determine a solução do problema.

6. Polinómios e o Teorema Fundamental da Álgebra

Como aconteceu com outras extensões do conceito de número, os números complexos conquistaram cidadania no reino da matemática devido a que permitiram resposta satisfatória a uma certa eterna e insistente questão sobre a solubilibidade de certas equações; neste caso chamadas algébricas - equações que surgem das mais variádas maneiras em problemas da geometría, da física, da análise combinatória, etc. Repare que equações tão simples como $x^2 + 1 = 0$ não permitem soluções reais, pois qualquer numero real r que tomamos para substituir o simbolo x na expressão $x^2 + 1$ define um número real $r^2 + 1 \geq 1 > 0$. Por outro lado, séculos de aturadas investigações levaram à suspeita de que cada equação do tipo $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_0 = 0$ com coeficientes reais admite uma solução. As aspas aqui estão para indicar que muitas vezes não se sabia bem como interpretar a solução, e muito menos sabia-se ainda como generalizar raciocínios obtidos em casos especiais. Cardano (1501-76), por exemplo, formulou na sua *Ars Magna* o problema de dividir 10 em duas partes de forma que o produto fosse 40. Em termos algébricos isto leva ao problema a resolver $x(10-x) = 40$, (ou seja a $x^2 - 10x + 40 = 0$). Descobriu que, substituindo $x = 5 + \sqrt{-15}$ e deixando de lado as torturas mentais envolvidas, se multiplicarmos uma solução pela outra $(5+\sqrt{-15})(5-\sqrt{-15}) = 5^2 - (\sqrt{-15})^2 = 25 - (-15) = 40$, concluímos que se obtém o pretendido; contudo as soluções são tão subtis quão inúteis. O que faltava era uma interpretação convincente destes números chamados imaginários: flutuaram na mente sem concretização (modelo) que exiba a sua existência. Esta foi encontrada por Gauss (1777-1855) e independentemente também por um norueguês (C. Wessel) e um francês (R. Argand) pela mesma altura em 1799. Estes deram aos complexos a visualização que nós já apresentámos. Gauss utilizou a concretização dos complexos para dar a primeira demonstração satisfatória da suspeita em cima referida.

Com os complexos a dispôr podemos exprimir o teorema fundamental acerca da solubilidade de equações algébricas de forma muito simples e geral: os próprios coeficientes das equações também podem ser complexos.

Teorema (fundamental da álgebra). *Seja $n \geq 1$, e sejam $a_i \in \mathbb{C}$, $i = 1, \ldots, n$, números complexos com $a_n \neq 0$. Então a equação*

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x^1 + a_0 = 0\,,$$

tem uma solução em $\mathbb{C}$.

Prova. Vamos considerar a função polinomial $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definida por $z \mapsto f(z) = a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \ldots + a_1 z^1 + a_0$. Devemos mostrar que existe um $z_0 \in \mathbb{C}$ tal que $f(z_0) = 0$. Observemos que

$$\begin{aligned}
|f(z)| &= |a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \ldots + a_1 z^1 + a_0| \\
&= |z^n(a_n + \tfrac{a_{n-1}}{z} + \tfrac{a_{n-2}}{z^2} + \ldots + \tfrac{a_0}{z^n})| \\
&= |z^n||a_n + \tfrac{a_{n-1}}{z} + \tfrac{a_{n-2}}{z^2} + \ldots + \tfrac{a_0}{z^n}| \\
&\geq |z^n| \left|a_n - |\tfrac{a_{n-1}}{z} + \tfrac{a_{n-2}}{z^2} + \ldots + \tfrac{a_0}{z^n}|\right| \\
&= |z^n||a_n - |\textstyle\sum_{j=1}^n \tfrac{a_{n-j}}{z^j}||
\end{aligned}$$

Ora $|\sum_{j=1}^n \frac{a_{n-j}}{z^j}| \leq \sum_{j=1}^n |\frac{a_{n-j}}{z^j}|$. Como para $j \geq 1$ se tem que $1/|z| \to 0$ quando $|z| \to \infty$, vemos que as somas $\sum ...$ tendem para 0 com $|z| \to \infty$. Logo podemos inferir que $|a_n - |\sum ...|| \to |a_n|$, e como $a_n \neq 0$, decorre que $|f(z)| \to \infty$. Logo existe um $R > 0$ tal que $*$: para todos os z com $|z| > R$ se tem $|f(z)| > |f(0)|$. Ora a função $\mathbb{C} \ni z \mapsto |f(z)|$ é contínua, logo o teorema de Weierstrass, garante-nos que a restrição desta função ao disco $\mathcal{D}(0, R)$ assume o seu mínimo num ponto $z_0 \in \mathcal{D}(0, R)$; em particular $|f(z_0)| \leq |f(0)|$. Mas então a observação $*$ diz-nos que z_0 é mínimo global: para todos os $z \in \mathbb{C}$ temos $|f(z_0)| \leq |f(z)|$.

Vamos provar que $f(z_0) = 0$. Suponhamos que $f(z_0) \neq 0$. Então $z \mapsto f(z + z_0)/f(z_0)$ é função polynomial em z cujo módulo assume um mínimo de valor 1 in 0. Podemos escrever $f(z + z_0)/f(z_0) = 1 + a'_k z^k + \ldots + a'_n z^n$, com certos $a'_k \neq 0$, $a'_n \neq 0$, e $k \leq n$. Sabemos que a equação particular $z^k + a'_k = 0$ tem uma solução; escolhamos uma destas soluções, ω. Notemos $(1/\omega)^k = -1/a'_k$. Consideremos a função $\tilde{f}(z) = f(\frac{z}{\omega} + z_0)/f(z_0)$. Tal como antes, $\tilde{f}(z)$ é de novo função polinomial em z cujo modulo assume o seu mínimo de valor 1 em 0. Ora pela escolha de ω temos o desvenvolvimento

$$\tilde{f}(z) = \frac{f(\frac{z}{\omega} + z_0)}{f(z_0)} = 1 + a'_k(\frac{z}{\omega})^k + \ldots + a'_n(\frac{z}{\omega})^n = 1 - z^k + z^{k+1}g(z)\,,$$

com $g(z)$ um polnómio. Ora para $z \in [0, 1[$ (real) sufficientemente pequeno temos a estimativa $1 \leq |\tilde{f}(z)| \leq 1 - z^k + z^{k+1}|g(z)| = 1 - z^k(1 - z|g(z)|)$. Mas esta estimativa não pode ser verdadeira para todos os z. Esta contradicão, obtida ao assumir que f não tem raízes, mostra que f deve ter uma raíz. $\square$

7. Problemas de Olimpíadas Internacionais

1960/3: Considere o triângulo rectângulo $[ABC]$, com hipotenusa BC, com $\overline{BC} = a$. Considera a partição, $\{P_j\}$, do segmento BC num número ímpar, n, de partes iguais. Seja α o ângulo agudo $P_j\hat{A}P_{j+1}$. Seja h a altura do triângulo ABC. Mostre que
$\tan\alpha = \dfrac{4nh}{(n^2-1)a}$.

1966/4: Mostre que para todo o número natural n, e para todo o número real $x \neq k\pi/2^t$ $(t = 0, 1, \cdots, n\,;\ k \in \mathbb{N})$

$$\frac{1}{\sin 2x} + \frac{1}{\sin 4x} + \cdots + \frac{1}{\sin 2^n x} = \cot x - \cot 2^n x\,.$$

Indicação: Mostre que $\operatorname{cotan}(2^{k-1}x) - \operatorname{cotan}(2^k x) = 1/\sin(2^k x)\,,\ k \in \mathbb{N}\,.$

1968/5: Seja f uma função real de variável real. Suponha que existe um $a \in \mathbb{R}$ tal que $f(x+a) = 1/2 + \sqrt{f(x) - [f(x)]^2}\,,\ x \in \mathbb{R}\,.$

(a) Mostre que f é periódica (i.e., existe um $b \in \mathbb{R}$ tal que $f(x+b) = f(x)$, $x \in \mathbb{R}$).
(b) Para $a = 1$, dá um exemplo de uma função com as propriedades enunciadas.

1972/5: Sejam f e g duas funções reais de variável real, que verificam

$$f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)g(y)\,, \quad x, y \in \mathbb{R}\,.$$

Mostre que se f não é identicamente nula, e se $|f(x)| \leq 1$, $x \in \mathbb{R}$, então $|g(y)| \leq 1\,,$ $y \in \mathbb{R}\,.$

1973/5: G é o conjunto das funções reais de variável real não constantes da forma

$$f(x) = ax + b,\ a \text{ e } b \text{ são números reais,}$$

e G satisfaz as seguintes propriedades:

(a) Se $f, g \in G$, então $g \circ f \in G$, onde $(g \circ f)(x) = g(f(x))\,.$
(b) Se $f \in G$, então a sua inversa $f^{-1} \in G$, onde a inversa de $f(x) = ax + b$ é $f^{-1}(x) = (x-b)/a\,.$
(c) Para todo o $f \in G$, existe um número real x_f tal que $f(x_f) = x_f\,.$

Mostre que existe um número real k tal que $f(k) = k$ para todo o $f \in G\,.$

1977/6: Seja f uma função definida e com valores em $\mathbb{N}$. Mostre que se $f(n+1) > f(f(n))$ para todo o $n \in \mathbb{N}$, então $f(n) = n$, $n \in \mathbb{N}\,.$

1978/3: O conjunto dos números inteiros, $\mathbb{Z}$, escreve-se como a união dos seguintes conjuntos

$$\{f(1), f(2), \cdots, f(n), \cdots\}\,,\ \{g(1), g(2), \cdots, g(n), \cdots\}\,,$$

onde $f(1) < f(2) < \cdots < f(n) < \cdots\,,\quad g(1) < g(2) < \cdots < g(n) < \cdots\,,$ e $\ g(n) = f(f(n)) + 1\,,\quad n \geq 1\,.$ Determine $f(240)\,.$

1981/6: Seja f uma função real definida em $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ verificando para todo o $x, y \in \mathbb{Z}$

(1) $f(0, y) = y + 1\,,$ (2) $f(x+1, 0) = f(x, 1)\,,$ (3) $f(x+1, y+1) = f(x, f(x+1, y))\,,$

Determine $f(4, 1981)\,.$

1982/1: Seja f uma função definida e com valores em $\mathbb{N}$, verificando para todo o $m, n \in \mathbb{N}$

$$f(m+n) - f(m) - f(n) = 0 \text{ ou } 1$$
$$f(2) = 0, f(3) > 0\,, \text{ e } f(9999) = 3333\,.$$

Determine $f(1982)$.

1983/1: Determine todas as funções f definidas em $\mathbb{R}^+$ e com valores em $\mathbb{R}^+$:

(i) $f(xf(y)) = yf(x)\,,\ x, y \in \mathbb{R}^+$
(ii) $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0\,.$

1986/5: Determine as funções reais, f, positivas, e definidas em $\mathbb{R}^+$ que verificam:

(i) $f(xf(y))f(y) = f(x+y)$, $x, y \geq 0$,
(ii) $f(2) = 0$,
(iii) $f(x) \neq 0$ para $0 \leq x < 2$.

1988/3: Uma função f está definida em $\mathbb{N}$ por

$$\begin{aligned} f(1) &= 1, \quad f(3) = 3, \\ f(2n) &= f(n), \\ f(4n+1) &= 2f(2n+1) - f(n), \\ f(4n+3) &= 3f(2n+1) - 2f(n)\,. \end{aligned}$$

Determine o número de inteiros, n, menores do que ou iguais a 1988, tais que $f(n) = n$.

1990/4: Construa uma função $f : \mathbb{Q}^+ \to \mathbb{Q}^+$ tal que $\quad f(xf(y)) = f(x)/y\,,\ x,\ y \in \mathbb{Q}^+\,.$

1992/2: Determine as funções $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tais que $f\left(x^2 + f(y)\right) = y + (f(x))^2\,,\ \ x, y \in \mathbb{R}\,.$

1993/5: Verifique se existe $f\colon\ \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tal que $f(1) = 2$, $f(f(n)) = f(n) + n\,,\ n \in \mathbb{N}$, e $f(n) < f(n+1)\,,\ n \in \mathbb{N}\,.$

1994/5: Seja S o conjunto dos números reais estritamente maiores do que -1. Determine as funções $f : S \to S$ que verificam as seguintes condições:

(a) $f(x + f(y) + xf(y)) = y + f(x) + yf(x)\,,\ x, y \in S\,;$
(b) $f(x)/x$ é estritamente crescente sobre os intervalos $-1 < x < 0$ e $0 < x\,.$

1996/3: Determine as funções $f\colon\ \mathbb{Z}^- \to \mathbb{Z}^-$ que verificam

$$f(m + f(n)) = f(f(m)) + f(n) \qquad m, n \in \mathbb{Z}^-\,.$$

1999/6: Determine as funções $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tais que

$$f(x - f(y)) = f(f(y)) + xf(y) + f(x) - 1\,, x, y \in \mathbb{R}\,.$$

2002/5: Determine as funções reais de variável real f, que verificam

$$(f(x)+f(y))(f(u)+f(v)) = f(xu-yv)+f(xv+yu)\,, \quad x,y,u,v \in \mathbb{R}\,.$$