Uma *função*, f, é uma aplicação de um conjunto, D, que designamos por *domínio*, para um conjunto, C, designado por *contra-domínio*, segundo uma lei, $f(x)$, i.e. $f : D \to C$, verificando:

a) f está definida para todo o $x \in D$;

b) Para cada $x \in D$, $\{f(x)\} \subset C$ é um conjunto singular.

Designamos por *conjunto imagem* de D por f, ao subconjunto de C, $f(D) = \{f(x) \in C : x \in D\}$.

O que é uma função inversa de f, i.e. f^{-1}? Basicamente é, caso exista, uma aplicação do conjunto imagem, $f(D)$, para o domínio, D, segundo a lei, $f^{-1}(x)$, i.e. $f^{-1}(f(x)) = x$.

Uma *função*, f, diz-se *sobrejectiva*, se $f(D) = C$, e *injectiva*, se existe uma única função inversa f^{-1} com domínio $f(D)$.

Exemplo: A função quadrática é uma aplicação, g, com domínio $\mathbb{R}$, contradomínio $\mathbb{R}$, segundo a lei $g(x) = x^2$. O espaço imagem é dado por $g(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^+$. Neste caso, esta função admite duas funções inversas de domínio $\mathbb{R}^+$, que designaremos por g_-^{-1} e g_+^{-1}, de espaço imagem $\mathbb{R}^-$ e $\mathbb{R}^+$, segundo as leis, $g_-^{-1}(x) = -\sqrt{x}$ e $g_+^{-1}(x) = \sqrt{x}$, respectivamente.

Funções Exponencial e Logarítmo

A *função exponencial de base* $a \in \mathbb{R}^+$ é uma aplicação, ℓ_a, com domínio $\mathbb{R}$, contradomínio $\mathbb{R}$, segundo a lei $\ell_a(x) = a^x$. O espaço imagem é dado por $\ell_a(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^+$. Neste caso, esta função admite uma única inversa de domínio $\mathbb{R}^+$, que designaremos por ℓ_a^{-1}, de espaço imagem $\mathbb{R}$, segundo a lei, $\ell_a^{-1}(x) = \log_a(x)$, designada por *logarítmo de base* a.

I. Supondo, $a, b \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$, $x, y, m, n \in \mathbb{R}$, justifica que:

1. $\log_a(1) = 0$ e $\log_a(a) = 1$.
2. $\log_a(a^n) = n$, $\log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y)$ e $\log_a(x^n) = n \log_a(x)$.
3. $\log_b(x) = \log_a(x)/\log_a(b)$.
4. $\log_a(x/y) = \log_a(x) - \log_a(y)$, $\log_a(1/y) = -\log_a(y)$ e $\log_b(a) = 1/\log_a(b)$.
5. Para $a > 1$ a função $\log_a$ é crescente. Conclui que $\log_a x > 0$, se $x > 1$.

II. Resolve as seguintes equações e sistemas de equações:

1. Determina $x \in \mathbb{R}$ tal que $2^{2+x} - 2^{1-x} = 8$.
2. Determina $x \in \mathbb{R}$ tal que $3^{2^x} = 2^{3^x}$.
3. Determina $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tal que $3^x 5^y = 2^{2x+1} + 2^{2x-1}$, $3^y 5^x = 2^{2x+2} + 2^{2x-2}$.
4. Determina $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tal que $x^y = y^x$, $y = 3x$.

III. Teoremas de caracterização:

1. Seja f uma função de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}^+$, verificando $f(x+y) = f(x)f(y)$, $x, y \in \mathbb{R}$ e $f(1) = a$. Mostra que, se f está limitada em algum intervalo da recta real, então $f \equiv \ell_a$.
2. Seja g uma função de $\mathbb{R}^+$ em $\mathbb{R}$, verificando $g(xy) = g(x) + g(y)$, $x, y \in \mathbb{R}$ e $g(a) = 1$. Mostra que, se g está limitada em algum intervalo da recta real, então $g \equiv \log_a$.
3. Seja h uma função de $\mathbb{R}^+$ em $\mathbb{R}^+$, verificando $h(xy) = h(x)h(y)$, $x, y \in \mathbb{R}^+$. Mostra que, se h está limitada em algum intervalo da recta real, então $h(x) = x^a$, $x \in \mathbb{R}^+$, para algum $a \in \mathbb{R}$.
4. Seja k uma função de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, verificando $k(x+y) = k(x) + k(y)$, $x, y \in \mathbb{R}$ e $k(1) = a$. Mostra que, se k está limitada em algum intervalo da recta real, então $k(x) = ax$, $x \in \mathbb{R}$.

Funções Hiperbólicas

A *função co-seno hiperbólico de base* $a \in]1, +\infty]$ é uma aplicação, $\cosh_a$, com domínio $\mathbb{R}$, contradomínio $\mathbb{R}$, segundo a lei $\cosh_a(x) = (a^x + a^{-x})/2$. O conjunto imagem é dado por $\cosh_a(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^+$. A *função seno hiperbólico de base* $a \in \mathbb{R}^+$ é uma aplicação, $\sinh_a$, com domínio $\mathbb{R}$, contradomínio $\mathbb{R}$, segundo a lei $\sinh_a(x) = (a^x - a^{-x})/2$. O conjunto imagem é dado por $\sinh_a(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$. Define função inversa da função $\sinh_a$ (exercício).

IV. Propriedades destas funções (verificar).

1. $\cosh_a(x) = \cosh_a(-x)$, $\sinh_a(x) = -\sinh_a(-x)$ e $\cosh_a^2(x) - \sinh_a^2(x) = 1$, $x \in \mathbb{R}$.
2. $\cosh_a(x+y) = \cosh_a(x)\cosh_a(y) + \sinh_a(x)\sinh_a(y)$ e
   $\sinh_a(x+y) = \sinh_a(x)\cosh_a(y) + \cosh_a(x)\sinh_a(y)$, $x, y \in \mathbb{R}$.
3. $\cosh_a(x) + \cosh_a(y) = 2\cosh_a((x+y)/2)\cosh_a((x-y)/2)$ e
   $\sinh_a(x) + \sinh_a(y) = 2\sinh_a((x+y)/2)\cosh_a((x-y)/2)$, $x, y \in \mathbb{R}$.

V. Sabendo que $t = \tanh_a(x/2)$ onde $\tanh_a$ é a função real de variável real, segundo a lei $\tanh_a(x) = \sinh_a(x)/\cosh_a(x)$, conhecida como *função tangente hiperbólica*, mostra que:
$\cosh_a(x) = (1+t^2)/(1-t^2)$ e $\sinh_a(x) = 2t/(1-t^2)$.

VI. Problemas de competições internacionais.

1. Para cada uma das expressões seguintes, indica os valores de x que as tornam quadrados perfeitos: $1+x$, $1+x+x^2$, $1+x+x^2+x^3$ e $1+x+x^2+x^4$.
2. Determina $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tais que $x+y-z = -1$, $x^2 - y^2 + z^2 = 1$, $-x^3 + y^3 + z^3 = -1$.
3. Determina as funções reais que verificam $(x-y)f(x+y) - (x+y)f(x-y) = 4xy(x^2 - y^2)$, $x, y \in \mathbb{R}$.

Função Característica

Todo o número real, x, se representa de forma única como, $x = [x] + \{x\}$, onde $[x]$ é a *parte inteira* de x, i.e. o maior inteiro menor do que, ou igual a, x, e $\{x\}$, a *parte decimal* de x.

Definimos a função característica, como a aplicação, c, de domínio, $\mathbb{R}$, conjunto imagem $\mathbb{Z}$, e expressão analítica, $c(x) = [x]$.

I. Propriedades elementares, $x, y \in \mathbb{R}$ (verificar):

1. $x = [x]$ se e somente se $x \in \mathbb{Z}$;
2. $x = \{x\}$ se e somente se $x \in [\,0\,,\,1\,[$;
3. $x - 1 < [x] \leq x$;
4. $[x + k] = [x] + k$ e $\{x + k\} = \{x\}$, $k \in \mathbb{Z}$;
5. $[x + y] - [x] - [y]$ é igual a 0 ou a 1; e portanto, $[x + y] \geq [x] + [y]$ e $\{x + y\} \leq \{x\} + \{y\}$.

II. Exercícios.

1. Determina o número de algarismos 0 finais consecutivos na representação decimal de $1000!$;
2. Seja f a função de domínio $\mathbb{N}$ e conjunto imagem $\mathbb{N}$, que nos dá a máxima potência de 2 que divide $n!$. Determina $n - f(n)$, $n \in \mathbb{N}$;
3. Mostra que para todo o $n \in \mathbb{N}$, $2(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) < \dfrac{1}{\sqrt{n}} < 2(\sqrt{n} - \sqrt{n-1})$.
   Como consequência, mostra que para todo o $n, m \in \mathbb{N}$, com $n \geq m \geq 1$,
   $$2(\sqrt{n+1} - \sqrt{m}) < \frac{1}{\sqrt{m}} + \frac{1}{\sqrt{m+1}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} < 2(\sqrt{n} - \sqrt{m-1});$$
4. Mostra que, para todo o $N \in \mathbb{N}$ e $x \in \mathbb{R}$ $\dfrac{[Nx]}{N} \leq x < \dfrac{[Nx]}{N} + \dfrac{1}{N}$;
5. Determina $\left[1 + \dfrac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \dfrac{1}{\sqrt{1000000}}\right]$;
6. Seja $\mathcal{M} \subset \mathbb{Z}^+$ o subconjunto não vazio, definido por: $x \in \mathcal{M}$ se $[\sqrt{x}] \in \mathcal{M}$ e $4x \in \mathcal{M}$. Mostra que:
   (a) $1 \in \mathcal{M}$; (b) $\{2^n\,,\ n \in \mathbb{N}\} \subset \mathcal{M}$; (c) $\mathcal{M} \equiv \mathbb{Z}^+$;

III. Teorema de Beatty. Sejam $x, y \in \mathbb{R}^+ \setminus \mathbb{Q}$ tais que $1/x + 1/y = 1$. Então
$$S(x) \cup S(y) = \mathbb{Z}^+ \quad \text{e} \quad S(x) \cap S(y) = \emptyset,$$
onde $S(x), S(y)$ são os sub-conjuntos de $\mathbb{N}$ definidos por, $S(x) = \{[n\,x]\,,\ n \in \mathbb{Z}^+\}$ e $S(y) = \{[n\,y]\,,\ n \in \mathbb{Z}^+\}$.

Funções Polinomiais

Como estamos a falar para todo o universo délfico, vamos motivar o estudo das funções polinomiais a partir do **problema de Delfos**:

Construir, com régua e compasso, o lado de um cubo cujo volume é o dobro do volume de um dado cubo.

Assim, dado $k \in \mathbb{R}^+$, queremos determinar $x \in \mathbb{R}^+$ tal que $x^3 = 2k^3$. O matemático grego Menaechmus (275-325 a.c.) mostrou que o valor x procurado é a abcissa do ponto de intersecção das parábolas $x^2 = ky$ e $y^2 = 2kx$. De facto, $x^4 = k^2y^2 = 2k^3x$, e portanto $x^3 = 2k^3$.

Posteriormente, Descartes (1596-1650) mostrou que qualquer das parábolas anteriormente consideradas é suficiente para a resolução do problema de Delfos (consultar o livro de H. Dörrie, "100 Great Problems of Elementary Mathematics, their history and solution").

Pode ver-se, que com régua e compasso, e a partir de comprimentos $a_1, a_2, \ldots, a_n$ dados, somente se pode construir segmentos cujo comprimento se expressa mediante funções racionais (polinómios divididos por polinómios) destes comprimentos dados, juntamente com raízes quadradas de tais expressões. Prova-se também que a solução da equação polinomial de grau três dada não pode escrever-se mediante expressões deste tipo. Concluímos assim que o problema de delfos é impossível.

Existem muitos e variados problemas geométricos que admitem uma interpretação em termos de equações polinomiais. Podemos citar o problema da trissecção de um ângulo dado, ou o da construção de um polígono regular de 17 lados. Voltaremos a estes problemas numa das próximas lições.

I. Equações quadráticas: $ax^2 + bx + c = 0$, $a, b, c \in \mathbb{R}$ com $a \neq 0$.

Sendo α, β as suas soluções, i.e. $a(x-\alpha)(x-\beta) = ax^2 + bx + c$, e portanto

$$\alpha + \beta = -b/a \quad \text{e} \quad \alpha\beta = c/a; \tag{1}$$

pelo que $\alpha, \beta \in \{(-b + \sqrt{b^2 - 4ac})/2a\,,\ (-b - \sqrt{b^2 - 4ac})/2a\}$.

Como aplicação determina uma equação quadrática cujas soluções são:

a) α^2, β^2; b) $1/\alpha, 1/\beta$; c) $1/\alpha^2, 1/\beta^2$.

II. Equações cúbicas: $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ com $a \neq 0$.

Sendo α, β, γ as suas soluções, i.e. $a(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, e portanto

$$\alpha + \beta + \gamma = -b/a\,, \quad \alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma = c/a \quad \text{e} \quad \alpha\beta\gamma = -d/a\,. \tag{2}$$

Para a resolução desta equação vamos começar por considerar $a = 1$, e efectuar a mudança de variável, $x = y - b/3$. Desta forma a equação dada toma a forma $y^3 + py + q = 0$. Agora, segue o procedimento que passamos a descrever (exercício):

a) Identifica p, q em termos dos coeficientes b, c, d da equação dada.

b) Identifica r, s tais que $y^3 + py + q = y^3 + r^3 + s^3 - 3rsy$; e mostra que r^3, s^3 são soluções da equação quadrática $z^2 - qz - p^3/27 = 0$.

c) Factoriza a expressão $y^3 + r^3 + s^3 - 3rsy$ como produto de dois polinómios na variável y de graus 2 e 1.

d) Determina a solução geral da equação dada.

Como generalização das fórmulas (1) e (2) para as equações polinomiais de graus 2 e 3 temos as designadas *fórmulas de Cardano-Viéte-Giraud*.

Designado por $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ as n soluções (contando com as respectivas multiplicidades), garantidas pelo teorema fundamental da Álgebra de Gauss, da equação

$a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_{n-1} z + a_n = 0\,,\;\; a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{C}\,,$ com $a_0 \neq 0$, temos:

$$\begin{aligned} &\alpha_1 + \cdots + \alpha_n = -a_1/a_0 \\ &\alpha_1\alpha_2 + \cdots + \alpha_{n-1}\alpha_n = a_2/a_0 \\ &\alpha_1\alpha_2\alpha_3 + \cdots + \alpha_{n-2}\alpha_{n-1}\alpha_n = -a_3/a_0 \\ &\qquad\qquad \vdots \\ &\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n = (-1)^n a_n/a_0\,. \end{aligned} \tag{3}$$

III. Exercícios:

1. Sejam x_1, x_2, x_3 as soluções da equação $x^3 + px + q = 0$. Determina a equação cujas soluções são:
   a) x_1^2, x_2^2, x_3^2; b) $1/x_1 + 1/x_2, 1/x_1 + 1/x_3, 1/x_2 + 1/x_3$;
   c) $1/x_1, 1/x_2, 1/x_3$; d) $x_1/(x_2x_3), x_2/(x_1x_3), x_3/(x_1x_2)$.

2. Se as soluções da equação $px^3 + qx^2 + rx + s = 0$ estão em progressão geométrica, mostra que $pr^3 = q^3 s$.

3. Seja P uma função polinomial com coeficientes reais. Sejam a, b, c números reais tais que $\sqrt{c}$ é um número irracional. Mostra que, se $P(a + b\sqrt{c}) = 0$ então $P(a - b\sqrt{c}) = 0$, e a ordem de multiplicidade destas duas soluções coincide.

4. Resolve em $\mathbb{Z}$ a equação, $\sqrt[3]{x + \sqrt{y}} + \sqrt[3]{x - \sqrt{y}} = z$.

5. Resolve em $\mathbb{Z}$ o sistema de equações, $3 = x + y + z = x^3 + y^3 + z^3$.

6. Determina as soluções reais da equação $5x^2 - 2xy + 2y^2 - 2x - 2y + 1 = 0$.

7. Determina para que inteiros a, n o sistema de equações
   $$x + y + z = 1\,,\;\; xy + yz + zx = a\,,\;\; xyz = 2^n\,,$$
   tem soluções inteiras.

8. Considera $T_1(x) = x^2 - 2$; e define $T_n(x) = T_1(T_{n-1}(x))$, para $n = 2, \ldots$. Mostra que para qualquer $n \in \mathbb{N}$, as soluções da equação $T_n(x) = x$ são reais e distintas.