O método de indução matemática serve para resolver problemas envolvendo números naturais. Normalmente, usa-se para estabelecer fórmulas que valem para todos os números naturais ou demonstrar propriedades de que gozam todos os números naturais.

Na base deste princípio está o Princípio da Boa Ordenação dos números naturais: todo o subconjunto $A \subseteq \mathbb{N}$ possui um menor elemento, isto é, um elemento a que satisfaz $a \leq b$, para todo o $b \in A$. Note-se que este facto não é verdade, por exemplo, para os inteiros, para os reais, ou mesmo para o intervalo $[0, 1]$.

Teorema (Princípio da Indução). *Seja P uma propriedade referente aos números naturais. Se 1 goza dessa propriedade e se, além disso, o facto de o número natural n gozar de P implica que o seu sucessor $n + 1$ também goza, então todos os números naturais gozam da propriedade P.*

Exemplo . Provemos por indução que, para todo o número natural n, $5^n - 1$ é múltiplo de 4.

Em primeiro lugar, notemos que a propriedade é válida para $n = 1$. Supondo agora que, para um número natural n, $5^n - 1$ é múltiplo de 4, vejamos que $5^{n+1} - 1$ ainda é múltiplo de 4. Ora, se $5^n - 1$ é múltiplo de 4, existe um número inteiro m tal que $5^n - 1 = 4m$. Mas, então, $5^{n+1} - 1 = 5.5^n - 1 = 5(5^n - 1) + 4 = 5(4m) + 4 = 4(5m + 1)$, o que mostra que $5^{n+1} - 1$ é múltiplo de 4.

Nas demonstrações por indução, a hipótese de que a propriedade P é válida para o número natural n (da qual deve decorrer que P vale também para $n + 1$) chama-se hipótese de indução.

Exercício (1). Considera um tabuleiro de xadrez de 64×64 a que foi retirado uma quadrícula num dos cantos. Usa o método da indução para provar que é possível cobrir todo o tabuleiro usando apenas peças compostas por três quadrículas em forma de canto.

Sugestão: Prova por indução que a mesma propriedade vale para todo o tabuleiro de lado 2^n a que é retirada uma quadrícula num dos cantos.

O Princípio da Indução não é utilizado somente como método de demonstração. Ele serve também para definir funções $f : \mathbb{N} \to X$ que têm como domínio o conjunto $\mathbb{N}$ dos números naturais. De facto, usando este princípio, para definir uma função com domínio $\mathbb{N}$ basta conhecer:

(a) O valor de $f(1)$;
(b) uma regra que permita calcular $f(n + 1)$ quando se conhece $f(n)$.

Estes dois dados permitem que se conheça $f(n)$ para todo o número natural n. Diz-se então que a função f foi definida por recorrência.

Exercício (2). Considera uma função $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tal que $f(1) = 3$ e $f(n+1) = 5f(n) + 1$. Dá uma fórmula explícita para $f(n)$, dado $n \in \mathbb{N}$.

Algumas propriedades podem não ser válidas para os primeiros números naturais e, no entanto, serem verdadeiras a partir de um determinado número natural. Assim, surge naturalmente a seguinte generalização do Princípio de Indução.

Teorema (Princípio da Indução Generalizado). *Seja P uma propriedade referente aos números naturais, cumprindo as seguintes condições:*

i) *O número natural a goza da propriedade P;*
ii) *Para um número natural $n \geq a$, se n goza da propriedade P então o seu sucessor $n+1$ também. Então todos os números naturais maiores ou iguais a a gozam da propriedade P.*

Vejamos uma situação onde se emprega o Princípio da Indução generalizado.

Exemplo . Para todo o $n \geq 3$, $2n + 1 < 2^n$.

Em primeiro lugar, observamos que esta propriedade é válida para $n = 3$ (apesar de ser falsa para $n = 1$ e para $n = 2$).

Suponhamos agora que a propriedade é válida para um certo $n \geq 3$ e mostremos que ainda vale para $n + 1$. Ora, $2(n + 1) + 1 = (2n + 1) + 2 < 2^n + 2 < 2^n + 2^n = 2^{n+1}$.

Exercício (3). Usa o exemplo anterior para demonstrar que $n^2 < 2^n$ para todo o $n \geq 5$.

Em algumas situações, ao tentarmos fazer uma demonstração por indução, na passagem de n para $n+1$, sentimos necessidade de admitir que a proposição valha não apenas para n mas sim para todos os números naturais menores ou iguais a n. Assim, podemos também formular o Princípio da Indução da seguinte forma:

Teorema (Segundo método de demonstração por indução). *Seja P uma propriedade referente aos números naturais. Se 1 goza dessa propriedade e se, além disso, dado $n \in \mathbb{N}$, a validade de P para todo o número natural menor ou igual do que n implicar que P é válida para $n + 1$, então P é verdadeira para todos os números naturais.*

Exercício .

(4) Prova que, para todo o $n \in \mathbb{N}$, $1 + 2 + 3 + \ldots + n = n(n + 1)/2$.
(5) Mostra que a soma dos n primeiros números ímpares é n^2, ou seja, que para todo o número natural n, $1 + 3 + 5 + \ldots (2n - 1) = n^2$.
(6) Prova que $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots \frac{1}{2^n} < 2, \forall n \in \mathbb{N}$.
(7) Mostra que, se $n \in \mathbb{N}$ e $n \geq 5$ então $4^n \geq n^4$.

(8) Demonstra que $2^n < n!$, para $n \geq 4$.

(9) Prova que existem $\binom{n}{k}$ subconjuntos de cardinalidade k num conjunto de cardinalidade n. Recorda que $\binom{n}{k} = n!/(k!(n-k)!)$.

(10) Prova que, para todo o $x \in \mathbb{R}$ e para todo o $n \in \mathbb{N}$,

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k.$$

Determina uma expansão para $(a+b)^n$, para $a, b \in \mathbb{R}$.

(11) [O Pequeno Teorema de Fermat] Mostra que, dado um número primo p, $n^p - n$ é múltiplo de p, para todo o $n \in \mathbb{N}$.

(12) Prova que para x e y números inteiros arbitrários, $x - y$ divide $x^n - y^n$, para todo o $n \in \mathbb{N}$.

(13) Mostra que, para todo o $n \in \mathbb{N}$, $1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = n(n+1)(2n+1)/6$.

(14) Qualquer que seja a maneira de decompor um polígono P, de n lados, em triângulos justapostos por meio de diagonais internas que não se intersectam, mostra que o número de diagonais utilizadas é sempre $n-3$.

(15) [A Torre de Hanói.] Considera três suportes A, B e C. No suporte A estão encaixados n discos cujos diâmetros, de baixo para cima, estão em ordem decrescente. Mostra que é possível, com $2^n - 1$ movimentos, transferir todos os discos para o suporte B, usando o suporte C como auxiliar, de modo que, durante a operação, nenhum disco maior fique sobre um menor.

(16) Considera n rectas num plano. Mostre que o "mapa" determinado por elas pode ser colorido com apenas duas cores sem que duas regiões vizinhas tenham a mesma cor.

(17) Dadas n rectas no plano, mostra que estas rectas dividem o plano em, no máximo, $(n^2+n+2)/2$ regiões.