Está na altura de reunirmos alguns dos conceitos sobre triângulos até agora abordados na demonstração de um dos mais belos teoremas desta teoria.

Num triângulo qualquer $[ABC]$ desenhamos as mediatrizes de cada lado, que se intersectam no circuncentro, O; as medianas, que se intersectam no baricentro, G; e as alturas, que se intersectam no ortocentro H. Estes três "centros" dum triângulo são colineares (teorema!) e a recta que os contém designa-se por recta de Euler.

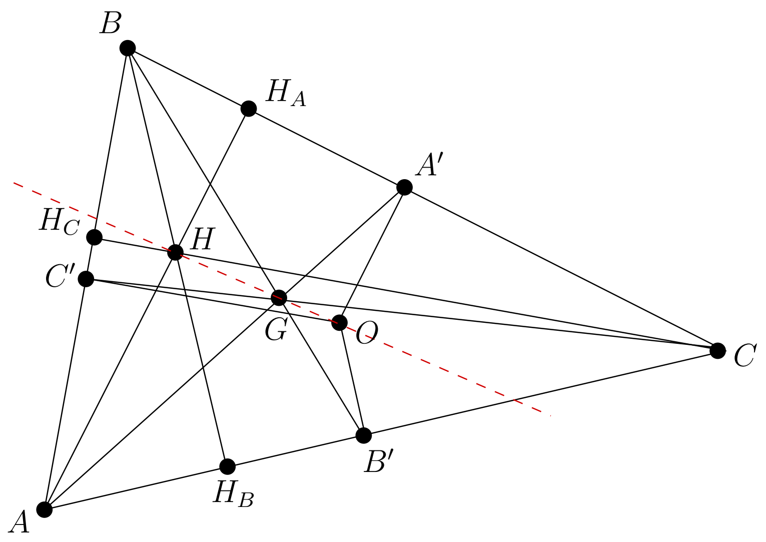

Figura 5: A recta de Euler

Nesta figura denotamos os pés das alturas por H_A, H_B e H_C. Denotámos o ponto médio do lado oposto ao vértice A por A', o ponto médio do lado oposto ao vértice B por B' e o ponto médio do lado oposto ao vértice C por C'. Há alguns factos que estão subentendidos na formulação do nosso teorema que carecem de demonstração. Estamos a falar da propriedade comum a todas estas famílias de rectas, a saber, que as medianas são concorrentes num ponto G, que as alturas são concorrentes num ponto H e que as mediatrizes são concorrentes num ponto G. Nos dois primeiros casos estas rectas são cevianas do triângulo. (Remetemos-te para o texto (online) de Geometria do Delfos onde poderás encontrar a definição de ceviana bem como algumas propriedades de que estas gozam.) Que estas se intersectam respectivamente em G e H deduz-se aplicando o teorema de Ceva (Exercício!) num caso mais facilmente do que no outro. (No caso das alturas tens que encontrar pares de triângulos semelhantes determinados por $[ABC]$ e as suas alturas.) Que as mediatrizes concorrem num ponto deduz-se usando apenas a definição de mediatriz. É importante que tenhas percebido bem estes três factos. Vale a pena passar algum tempo a compreendê-los bem antes de avançares para a demonstração da colinearidade de O, G e H.

Para demonstrar que O, G e H estão sobre a mesma recta, começamos por desenhar o *triângulo medial*. Este triângulo obtém-se unindo os pontos médios de cada lado. Demonstra os seguintes resultados:

- O triângulo $[A'B'C']$ é semelhante ao triângulo $[ABC]$, com razão de semelhança $\frac{1}{2}$.
- $\overline{AG} = 2\overline{GA'}$; $\overline{BG} = 2\overline{GB'}$ e $\overline{CG} = 2\overline{GC'}$.

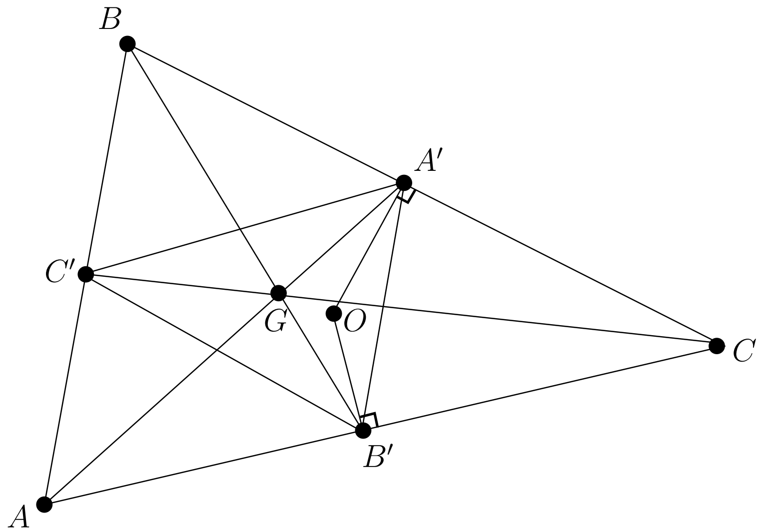

Figura 6: O triângulo medial

Qualquer um dos factos listados acima demonstra-se usando semelhança de triângulos. Assegura--te que és capaz de escrever cada uma destas demonstrações. (No segundo item basta mostar uma daquelas igualdades, e.g. $\overline{CG} = 2\overline{GC'}$. Desenha sobre a figura!) Uma conclusão imediata é que os triângulos $[ABC]$ e $[A'B'C']$ partilham o mesmo baricentro. Além disso, também pode concluir-se que o circuncentro de $[ABC]$ coincide com o ortocentro de $[A'B'C']$. (A mediatriz do segmento $[AC]$ coincide com a altura do triângulo $[A'B'C']$ a partir vértice B', etc...) Consideremos uma simetria do plano dada pela reflexão em torno do ponto G seguida duma contracção de vértice em G e razão $\frac{1}{2}$. Tratando-se de uma simetria do plano, esta aplicação envia rectas em rectas (o segmento que une P a Q no segmento que une as imagens destes pontos), triângulos em triângulos (semelhantes!), rectas perpendiculares em rectas perpendiculares, etc. Em particular dos factos que demonstraste, conclui-se que o triângulo $[ABC]$ é enviado no triângulo $[A'B'C']$. Desta forma, a intersecção das alturas de $[ABC]$ é enviada na intersecção das correspondentes rectas, que, como é facil verificar, são as alturas do triângulo $[A'B'C']$. Como já vimos, as alturas de $[A'B'C']$ intersectam--se em O, ou seja, O é a imagem de H pela simetria que estabelecemos. Em particular, O, G, H estão sobre a mesma recta.

Nota: Neste problema usámos um triângulo acutângulo com uma forma particular para tornar a exposição mais clara. Por isso convidamos-te a verificar o que acontece quando tomamos triângulos mais ou menos regulares (triângulos equiláteros, isóceles, obtusos, rectângulos, etc.). Uma conclusão divertida que poderás tirar é que, para triângulos demasiado regulares, a recta de Euler não está bem definida!

EXERCÍCIOS

(14) [Fácil] Seja $[ABC]$ um triângulo qualquer. Mostra que as bissectrizes de cada ângulo são concorrentes num ponto (o incentro do triângulo).

(15) Verdadeiro ou falso: "O incentro de $[ABC]$ pertence à recta de Euler se e só $[ABC]$ é isósceles"?

(16) Seja $[ABC]$ um triângulo e A', B' C' os pontos de tangência do triângulo inscrito em $[ABC]$ (seguindo a convenção tácita que A' está sobre o lado oposto a A, etc...). Mostra que os segmentos $[AA']$, $[BB']$ e $[CC']$ são concorrentes. (O ponto assim determinado chama-se o ponto de Gregonne.)

(17) Seja ABC um triângulo acutângulo. Determina o ponto P, (que se denomina por ponto de Fermat) no interior deste triângulo, tal que a medida $g = \overline{PA} + \overline{PB} + \overline{PC}$ seja mínima. [Dica: Exercício 7.]

(18) Um triângulo $[ABC]$ tem área 1. Sejam A', B' e C' três pontos pertencentes a cada um dos lados de $[ABC]$ (observe-se a convenção anterior). Supõe que o segmento $[AA']$ bissecta $[BB']$ num ponto X, que o $[BB']$ bissecta $[CC']$ em Y e que $[CC']$ bissecta $[AA']$ em Z. Calcula a área do triângulo $[XYZ]$.

(19) Seja $[ABC]$ um triângulo qualquer. Considera $A', B^* \in [AB]$, $B', C^* \in [BC]$, $C', A^* \in [AC]$, tais que

$$\overline{AA'} = \frac{1}{n}\overline{AB} = \overline{B^*B}, \quad \overline{BB'} = \frac{1}{n}\overline{BC} = \overline{C^*C}, \quad \overline{CC'} = \frac{1}{n}\overline{AC} = \overline{A^*A},$$

onde $1 \leq n \leq \infty$. Sejam $X = [C^*A'] \cap [A^*B']$, $X = [A^*B] \cap [B^*C']$ e $X = [\,B^*C'] \cap [C^*A']$.

(a) Calcula a área de $[XYZ]$ em função da área de $[ABC]$.

(b) Para que n se tem $X = Y = Z$?

(c) Exprime $[XYZ]$ como imagem de $[ABC]$ através de uma simetria do plano.

(d) Analisa os casos $n \to \infty$ e $n \to 1$. No caso $n \to 1$, que triângulo é $[ABC]$ em relação a $[XYZ]$?