Nos problemas anteriores usaste a noção de triângulos congruentes. A noção de semelhança de triângulos é outra noção igualmente importante. Intuitivamente, dois triângulos semelhantes têm a mesma forma mas podem ter tamanhos diferentes.

Dizemos que os triângulos $[ABC]$ e $[DEF]$ são *semelhantes* (através da correspondência $A \to D, B \to E, C \to F$), se os ângulos correspondentes forem congruentes (isto é, $\widehat{CAB} = \widehat{FDE}$, $\widehat{ABC} = \widehat{DEF}$, $\widehat{BCA} = \widehat{EFD}$) e os lados forem proporcionais (isto é, $\frac{\overline{AB}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{EF}} = \frac{\overline{CA}}{\overline{FD}}$). Se $[ABC]$ for semelhante a $[DEF]$ escrevemos $[ABC] \sim [DEF]$. À razão entre lados correspondentes de triângulos semelhantes chamamos *razão de semelhança* desses triângulos.

Para verificar que dois triângulos são semelhantes, pela definição que acabámos de dar, é necessário verificar dois conjuntos de condições. No entanto, a segunda condição, em geral, é mais difícil de verificar que a primeira e por vezes em problemas concretos é apenas possível verificar algumas daquelas condições, sem prejuízo dos dois triângulos em questão serem semelhantes. Para simplificar a verificação de que dois triângulos são semelhantes existem três critérios. Estes envolvem apenas a verificação de um subconjunto das condições da definição de semelhança de triângulos. Cada critério tem um nome que sugere quais as condições são usadas.

- **Critério AAA.** Quaisquer dois triângulos com ângulos internos iguais são semelhantes; mais precisamente: se os triângulos $[ABC]$ e $[DEF]$ forem tais que $\widehat{CAB} = \widehat{FDE}$, $\widehat{ABC} = \widehat{DEF}$, $\widehat{BCA} = \widehat{EFD}$, então $[ABC] \sim [DEF]$.
- **Critério LAL.** Se, em quaisquer dois triângulos, ângulos congruentes subentenderem lados proporcionais, então são semelhantes. (Isto é, se $[ABC]$ e $[DEF]$ forem tais que $\widehat{CAB} \simeq \widehat{FDE}$ e $\frac{\overline{AB}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{DF}}$, então $[ABC] \sim [DEF]$.)
- **Critério LLL.** Quaisquer dois triângulos com lados proporcionais são semelhantes. (Isto é, se tivermos $\frac{\overline{AB}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{DF}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{EF}}$, então $[ABC] \sim [DEF]$.)

O famoso teorema de Pitágoras que diz que num triângulo rectângulo, a soma dos quadrados dos comprimentos dos catetos é igual ao quadrado do comprimento hipotenusa pode demonstrar-se usando semelhança de triângulos. No texto que se segue designamos por minúsculas a, b, c os comprimentos dos lados de um triângulo $[ABC]$ que se opõem aos vértices com a mesma letra. Façamos a demonstração o teorema de Pitágoras. Seja $[ABC]$ um triângulo rectângulo de hipotenusa $\overline{BC}$. Temos de mostrar que $a^2 = b^2 + c^2$. Seja D o ponto da recta BC tal que $\overline{AD} \perp \overline{BC}$. Uma vez que $\widehat{ABC}$ e $\widehat{BCA}$

são agudos, D está entre B e C; ponhamos $x = \overline{BD}$. No espaço que te deixamos abaixo faz a figura do que até agora considerámos na nossa demonstração.

Pelo critério AA, temos $[ABC] \sim [DBA] \sim [DAC]$ e, destas semelhanças, obtemos as igualdades $\frac{b}{a} = \frac{a-x}{b}$, ou seja, $b^2 = a^2 - ax$ e $\frac{c}{a} = \frac{x}{c}$, ou seja, $c^2 = ax$. Adicionando membro a membro estas igualdades, obtemos a igualdade pretendida. O recíproco do teorema de Pitágoras também é válido: se, num triângulo $[ABC]$, se tiver $a^2 = b^2 + c^2$, então $[ABC]$ é um triângulo rectângulo de hipotenusa $\overline{BC}$. Para a demonstração deste resultado, basta considerar um triângulo rectângulo em que os catetos meçam b e c. Pelo Teorema de Pitágoras, a hipotenusa desse triângulo mede $a = \sqrt{b^2 + c^2}$. Como os lados deste triângulo medem o mesmo que os lados do triângulo $[ABC]$, concluímos que os dois triângulos são congruentes. Assim, o triângulo $[ABC]$ é rectângulo.

EXERCÍCIOS

(8) Considera um triângulo $\triangle ABC$ isósceles, com $\overline{AB} = \overline{AC}$. Mostra que a mediana, altura e mediatriz de $[ABC]$ em A coincidem.

(9) *XXI OPM - Categoria B, 1ª Eliminatória*
Sejam $\mathcal{C}_1$ e $\mathcal{C}_2$ duas circunferências concêntricas de raios r e R, respectivamente, com $r \leq R$. Os pontos A, B e C, distintos, pertencem a $\mathcal{C}_2$ e as cordas $[AB]$ e $[AC]$ são tangentes a $\mathcal{C}_1$. Sabendo que $R = 5$ e $\overline{BC} = 8$, determina o raio de $\mathcal{C}_1$.

(10) *XXII OPM- Categoria B, Final*
Na figura está desenhado um triângulo equilátero $[ABC]$. O ponto D é o ponto médio de $[AC]$ e é o centro de uma semi-circunferência de raio R, tangente a $[AB]$, a $[BC]$ e a uma circunferência de raio r, igualmente tangente a $[AB]$ e a $[BC]$. Qual é o valor de $\frac{r}{R}$?

(11) *I Olimpíada Iberoamericana de Matemática, Colombia, 1985 - Problema 6*
Considere-se o triângulo acutângulo $[ABC]$, pontos D, E e F das rectas que suportam os segmentos $[BC]$, $[AC]$ e $[AB]$, respectivamente. Supõe que aquelas rectas passam pelo centro O da

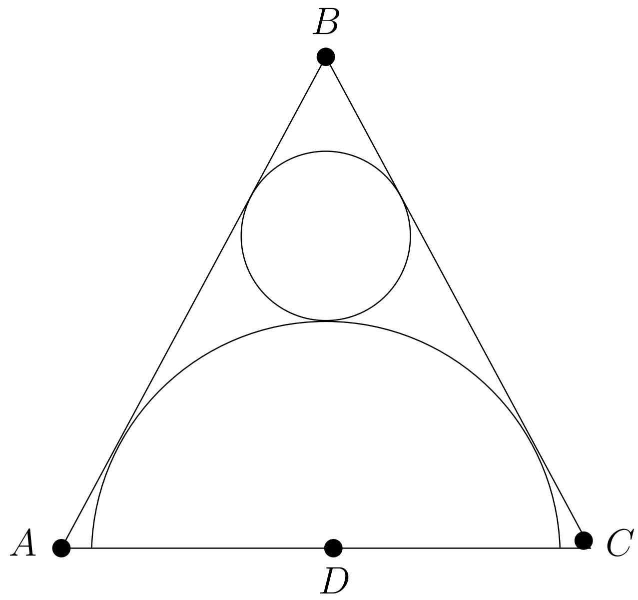

Figura 4: Exercício 10

circunferência circunscrita ao triângulo $[ABC]$, cujo raio é R. Mostra que

$$\frac{1}{\overline{AD}} + \frac{1}{\overline{BE}} + \frac{1}{\overline{CF}} = \frac{2}{R}.$$

Sugestões: Tenta calcular as áreas dos quadriláteros $[ABOC]$, $[BCOA]$ e $[CAOB]$ em função da área do triângulo $[ABC]$, de R e dos segmentos $[AD]$, $[BE]$ e $[CF]$.

Observa ainda que, se dois triângulos têm a mesma base, então a razão entre as suas áreas é igual à razão entre as suas alturas (relativas à base comum).