Consideremos o seguinte problema:

> Seja $[ABC]$ um triângulo equilátero, P_1 um ponto do lado $[AB]$, P_2 um ponto do lado $[BC]$ e P_3 um ponto do lado $[CA]$, tais que a medida $\overline{AP_1}$ é igual à medida $\overline{BP_2}$ e é igual à medida $\overline{CP_3}$. Mostra que o triângulo $[P_1P_2P_3]$ é um triângulo equilátero.

Ao escrever o problema usámos alguns símbolos que podem ser diferentes daqueles que usas. Concretamente, com $[ABC]$ queremos designar o triângulo que se obtém unindo três pontos A, B, C; o símbolo $[AB]$ designa o segmento de recta que se obtém unindo A com B e $\overline{AB}$ designa a medida do segmento $[AB]$. Passemos à resolução deste problema. Nos problemas de Geometria que envolvem figuras geométricas é sempre um bom começo fazer uma figura do que é dado. O triângulo

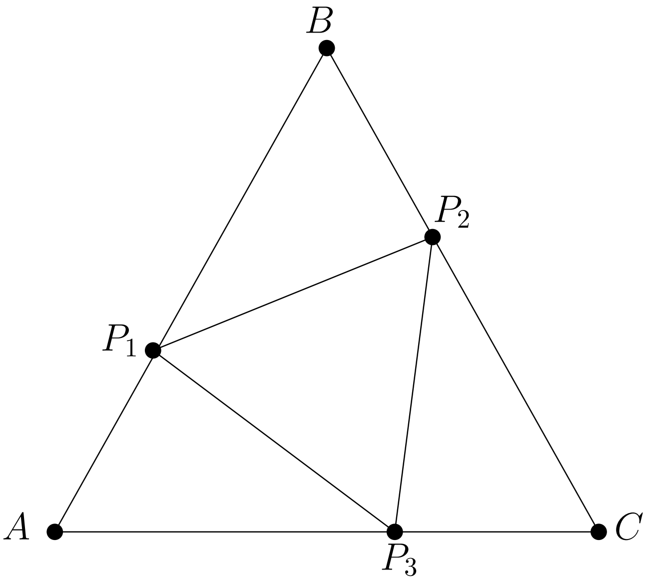

Figura 1: Dados do problema

$[P_1P_2P_3]$ será equilátero se conseguirmos mostrar que, tal qual, $[ABC]$ os seus lados têm igual comprimento. [Na Figura 1 sombreia o interior dos triângulos $[AP_1P_3]$ e $[CP_3P_2]$.] Repara que $\overline{BC} = \overline{AC}$ pois $[ABC]$ é equilátero, por outro lado $\overline{BC} = \overline{BP_2} + \overline{P_2C}$ e $\overline{AC} = \overline{AP_3} + \overline{P_3C}$. Substituindo: $\overline{BP_2} + \overline{P_2C} = \overline{BC} = \overline{AC} = \overline{AP_3} + \overline{P_3C}$. Uma vez que $\overline{BP_2} = \overline{CP_3}$, obtém-se $\overline{AP_3} = \overline{CP_3}$. Tem-se então que $[AP_1P_3]$ e $[CP_3P_2]$ são dois triângulos em que dois dos seus lados têm iguais comprimentos e para além disso o ângulo que esses dois lados fazem em cada triângulo é igual; a saber, de 60 graus, simplesmente porque este é o ângulo que fazem quaisquer dois lados de um triângulo equilátero. [Na figura 1 marca nos triângulos sombreados os lados iguais e os ângulos iguais.] A conclusão que podemos tirar é que os dois triângulos que sombreaste são congruentes, isto é, coincidiriam se os pudessemos justapor, eventualmente virando um deles ao contrário. Em particular os lados que coincidiriam em tal justaposição são iguais donde se pode deduzir que $\overline{P_1P_3} = \overline{P_2P_3}$.

Dois triângulos $[ABC]$ e $[EFG]$ dizem-se congruentes se $\overline{AB} = \overline{EF}$, $\overline{BC} = \overline{FG}$ e $\overline{BC} = \overline{FG}$.

Repara que na nossa formulação está presente uma ordem para os lados dos dois triângulos. Desta forma, dizemos que dois triângulos são congruentes se houver um emparelhamento dos lados de um com os lados de outro, em que dois lados no mesmo par têm igual comprimento. Assim, de acordo com o que dissemos, $[ABC]$ pode ser congruente com $[EFG]$ sem que $[BAC]$ seja congruente com $[EFG]$. Para além da definição, usa-se também o resultado que diz que dois triângulos $[ABC]$ e $[EFG]$ são congruentes se

$$\widehat{ABC} = \widehat{EFG}, \widehat{BCA} = \widehat{FGE} \text{ e } \overline{BC} = \overline{FG} \quad \text{ou se} \quad \overline{AB} = \overline{EF}, \overline{BC} = \overline{FG} \text{ e } \widehat{ABC} = \widehat{EFG}.$$

Aqui voltámos a usar alguma notação que podes desconhecer. A amplitude do ângulo de vértice em B, comprendido entre os dois segmentos de recta $[AB]$ e $[BC]$ escreve-se da forma $\widehat{ABC}$.

Voltemos à resolução do problema. Tínhamos mostrado que $\overline{P_1P_3} = \overline{P_2P_3}$. No espaço que te deixamos, faz a prova de que $\overline{P_2P_3} = \overline{P_1P_2}$, usando agora os triângulos $[CP_3P_2]$ e $[BP_2P_1]$.

Finalmente podemos concluir que $[P_1P_2P_3]$ tem os lados todos iguais ou seja que é um triângulo equilátero.

EXERCÍCIOS

(1) Seja $[ABC]$ um triângulo equilátero. Considera três pontos P_1, P_2 e P_3 com P_1 sobre o lado $[AB]$, P_2 sobre o lado $[BC]$ e P_3 sobre o lado $[CA]$, tais que $\overline{AP_1} = \overline{BP_2} = \overline{CP_3}$. Seja Q_1 o ponto de intersecção dos segmentos $[AP_2]$ e $[CP_1]$, Q_2 o ponto de intersecção dos segmentos $[AP_2]$ e $[BP_3]$ e Q_3 o ponto de intersecção dos segmentos $[BP_3]$ e $[CP_1]$. Mostra que $[Q_1Q_2Q_3]$ é um triângulo equilátero.

(2) Seja $[ABC]$ um triângulo. Considera três pontos, P_1 sobre o lado $[AB]$, P_2 sobre o lado $[BC]$ e P_3 sobre o lado $[CA]$ tais que o triângulo $[AP_1P_3]$ é congruente com o triângulo $[P_3CP_2]$ e o triângulo $[P_3CP_2]$ é congruente com o triângulo $[BP_2P_1]$. Mostra que os triângulos $[ABC]$ e $[P_1, P_2, P_3]$ são equiláteros.

(3) Seja $[ABC]$ um triângulo isósceles ($\overline{AB} = \overline{BC}$) com a amplitude do ângulo $\widehat{ABC}$ igual a 20 graus. Seja Q um ponto de $[BC]$ tal que $\overline{BQ} = \overline{AC}$. Mostra que se construirmos um triângulo equilátero $[QBP]$ de base $[BQ]$ sobre o lado $[BC]$ no lado oposto ao do trângulo $[ABC]$, o triângulo $[ABC]$ é congruente ao triângulo $[PAB]$.

*****(4) Seja $[ABC]$ um triângulo isósceles ($\overline{AB} = \overline{BC}$) com a amplitude do ângulo $\widehat{ABC}$ igual a 20 graus. Seja Q um ponto de $[AB]$ tal que $\overline{QB} = \overline{AC}$. Calcula a amplitude do ângulo $\widehat{QCA}$.