Princípio de Inclusão-Exclusão

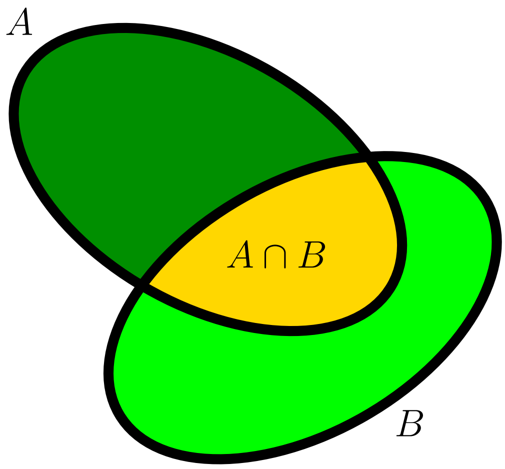
Consideremos dois conjuntos finitos A e B. Se A e B não contiverem elementos em comum, i.e., se $A \cap B = \emptyset$, então o número de elementos de $A \cup B$ é igual ao número de elementos de A mais o número de elementos de B. Denotemos o número de elementos de um conjunto X por $|X|$. Podemos exprimir a ideia que acabámos de descrever da seguinte forma:

$$A \cap B = \emptyset \quad \Longrightarrow \quad |A \cup B| = |A| + |B|\,.$$

E se a intersecção de A e B for diferente do vazio? Então a expressão $|A| + |B|$ conta duas vezes os elementos que pertencem à intersecção. Por outras palavras, a fórmula correcta é:

$$\boxed{|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|}$$

Este raciocínio já apareceu anteriormente, quando vimos que uma dada forma de contar os elementos



de um conjunto (por exemplo, os segmentos de recta com extremos num conjunto finito de pontos) produz sobre-contagem. Vejamos um exemplo. Seja A o conjunto dos números naturais menores ou iguais a 100 que são múltiplos de 6 e B o conjunto dos números naturais ≤ 100 que são múltiplos de 7. Temos

$$A = \{6, 12, 18, 24, 30, 36, 42, 48, 54, 60, 66, 72, 78, 84, 90, 96\} \text{ e}$$

$$B = \{7, 14, 21, 28, 35, 42, 49, 56, 63, 70, 77, 84, 91, 98\}\,.$$

O conjunto dos múltiplos de 6 que são menores ou iguais a 100 tem 16 elementos e o conjunto dos naturais ≤ 100 que são múltiplos de 7 tem 14 elementos. No entanto não há $16 + 14 = 30$ números de $\{1, \ldots, 100\}$ que ou são múltiplos de 6 ou são múltiplos de 7, i.e., não é verdade que $|A \cup B| = 30$. De facto, há que subtrair aqueles números que são simultaneamente múltiplos de 6 e de 7. Olhando para os conjuntos em questão conclui-se que há exactamente dois números nestas condições (o 42 e o 84); e portanto $|A \cap B| = 2$. Alternativamente, podemos calcular $|A \cap B|$ observando que sendo 6 e 7 números primos entre si os seus múltiplos comuns são os múltiplos do seu produto, 42. Como $100/42 < 3$ só há dois múltiplos de 42 em $\{1, 2, \ldots, 100\}$. Consideremos agora um problema semelhante.

> Seja A o conjunto dos múltiplos de 2 que são menores ou iguais a 100, B o conjunto dos naturais ≤ 100 múltiplos de 3 e C o conjunto dos naturais ≤ 100 múltiplos de 5. Pergunta: quantos elementos tem o conjunto $A \cup B \cup C$?

Como devem estar à espera a resposta não é $|A| + |B| + |C|$. Mas também não é

$$|A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap B| - |B \cap C| \,.$$

Calculemos. O número de naturais pares ≤ 100 é 50. O número de naturais ≤ 100 múltiplos de 3 é 33 (pois $33 \leq 100/3 < 34$). O número de naturais ≤ 100 múltiplos de 5 é $100/5 = 20$. Assim, $|A| = 50$, $|B| = 33$ e $|C| = 20$. Logo, é imediato que $|A \cup B \cup C| \neq 50 + 33 + 20 = 103 > 100$. Da mesma forma $|A \cap B| = 16$ (os múltiplos de 6), $|A \cap C| = 10$ (os múltiplos de 10) e $|B \cap C| = 6$ (os múltiplos de 15). No entanto, a razão pela qual $|A \cup B \cup C| \neq 50 + 33 + 20 - 16 - 10 - 6 = 71$ é que estamos a subtrair exactamente uma vez a mais os multiplos de $2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$. Esses números são $30, 60$ e 90. Eles pertencem a A (são pares), a B (são múltiplos de 3), a C (são múltiplos de 5), e também pertencem a $A \cap B$, a $A \cap C$ e a $B \cap C$. Desta forma, se com $|A| + |B| + |C|$ estamos a contar $30, 60, 90$ duas vezes a mais, ao fazer $|A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C|$ estamos a subtrair uma vez a mais a cardinalidade de $A \cap B \cap C = \{30, 60, 90\}$. Assim, conclui-se que a fórmula correcta é:

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C| \,.$$

A generalização desta ideia é conhecida pelo *Princípio da Inclusão-Exclusão.*

> Sejam $A_1, \ldots, A_k$ conjuntos finitos. Tem-se
>
> $$\left| \bigcup_{i=1}^{k} A_i \right| = \sum_{i=1}^{k} |A_i| - \sum_{i<j} |A_i \cap A_j| + \sum_{i<j<l} |A_i \cap A_j \cap A_l| - \cdots + (-1)^{k+1} |A_1 \cap \cdots \cap A_k| = $$
> $$= \sum_{i=1}^{k} (-1)^{i+1} \sum_{j_1 < \cdots < j_i} |A_{j_1} \cap \cdots \cap A_{j_i}| \,.$$

EXERCÍCIOS

(14) Determina o número de naturais menores ou iguais a 1000 que ou são múltiplos de 6 ou são múltiplos de 15.

(15) Calcula o número de naturais menores ou iguais a 1000 que não são divisíveis por 3, nem por 5, nem por 7.

(16) Determina o número de naturais menores ou iguais a 1000 que ou são múltiplos de 6, ou são múltiplos de 10, ou são múltiplos de 15.

(17) Quantos números naturais menores ou iguais a 1260 são primos com 1260?

(18) Calcula o número de pares x, y de inteiros entre 1 e 1000 tais que $x^2 + y^2$ é divisível por 7. [Os pares x, y e y, x contam uma só vez.]

(19) O professor K escreveu-vos n cartas e fechou-as em envelopes sem neles escrever as moradas. Tendo-se esquecido que carta pôs em qual envelope, escreveu as n moradas nos envelopes ao acaso. Qual a probabilidade de pelo menos uma das cartas estar endereçada correctamente? Qual é o limite desta probabilidade quando $n \to \infty$?