Aquilo que é necessário ter em mente quando se contam arranjos de objectos, ou conjuntos de objectos, é que num dado processo de contagem pode haver arranjos (ou conjuntos) que são contados múltiplas vezes. Nessa situação é necessário identificar o número de vezes que estes são contados em excesso e dividir por esse número.

Suponhamos que temos n pontos do plano, distintos. Quantos segmentos de recta se podem formar com estes pontos? E triângulos?

Comecemos por contar o número de segmentos de recta. Vale a pena repetir a ideia dos arranjos dos livros da prateleira. Devo escolher dois pontos para extremos do segmento de recta. Para o primeiro ponto tenho n possibilidades e para o segundo tenho $n-1$. No entanto o número de segmentos não é $n(n-1)$. Suponhamos que temos dois pontos A e B. Então o segmento que se obtém escolhendo A em primeiro lugar e B em segundo é igual ao segmento que se obtém escolhendo B em primeiro lugar e A em segundo. Efectivamente, com $n(n-1)$ estamos a contar todos os segmentos duas vezes. Cumpre pois dividir este número por 2. A resposta é $\frac{n(n-1)}{2} = \binom{n}{2}$. De facto, para definir um segmento basta que se dê os seus extremos; basta pois, que se escolham dois pontos de entre os n pontos. O número de maneiras do o fazer é pois $\binom{n}{2}$. Da mesma forma, se eu estiver interessado em contar os triângulos com vértices nestes n pontos, não importa a ordem pela qual escolho os vértices, importa apenas que conjunto de três pontos estou a escolher. Assim, o número de triângulos com vértices nos n pontos é $\binom{n}{3}$.

Binómio de Newton

O *binómio de Newton* é:
$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}.$$
Agora percebe-se porque chamamos a $\binom{n}{k}$ coeficientes binomiais. De facto, $\binom{n}{k}$ podia ter sido definido como sendo o coeficiente do termo $x^k y^{n-k}$ depois de devidamente expandida a potência $(x+y)^n$. (Expandir significa apenas multiplicar n vezes o termo $(x+y)$, usando as propriedades da multiplicação.) A única vantagem de se os definir dessa forma é que agora não teríamos nada para demonstrar!!! Demonstremos que

dado k um natural entre 0 e n, o coeficiente de $x^k y^{n-k}$ na expansão de $(x+y)^n$ é igual ao número de subconjuntos de k elementos de um conjunto de n elementos, i.e, é igual a $\binom{n}{k}$.

Para demonstrarmos este facto basta prestar atenção à forma como se obtém um dado termo $x^k y^{n-k}$. O produto $(x+y) \times \cdots \times (x+y)$, é uma soma de termos, cada um produto que se obtém escolhendo um de entre x ou y do primeiro parentesis, um de entre x ou y do segundo, etc. De cada vez que se escolher exactamente k vezes a variável x de k destes parentesis obtém-se um termo $x^k y^{n-k}$. Basta, pois, contar o número de vezes que tal acontece. Este número é o número de escolhas possíveis de k parentesis de entre n, i.e., $\binom{n}{k}$.

O binómio de Newton serve também para calcular muitas identidades envolvendo os coeficientes binomiais. Nomeadamente, tomando $x = y = 1$ temos

$$2^n = (1+1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}.$$

Claro que a mesma identidade se interpreta de outra forma. No segundo membro da igualdade, $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$ é o número de conjuntos que se podem formar com n objectos, i.e., a soma daqueles com 0 objectos (o vazio), mais aqueles com 1 objecto, e assim sucessivamente até ao conjunto que contém todos os n objectos. No primeiro membro, 2^n também designa o número de conjuntos que se podem formar com n objectos. Vejamos como o podemos demonstrar. Formar um conjunto com alguns dos n objectos pode ser feito, da mesma forma como fizemos anteriormente com o problema de retirar livros da prateleira, colocando etiquetas. Verde se fizer parte do conjunto a formar, vermelho, caso contrário. E de quantas maneiras podemos dar etiquetas? (Nota que neste caso não há um número fixo de etiquetas verdes nem um número fixo de etiquetas vermelhas, apenas sabemos que no total há n etiquetas.) Começamos com qualquer objecto. Há duas possibilidades, ou lhe damos uma etiqueta verde ou lhe damos uma etiqueta vermelha; o mesmo sucede para cada um dos restantes $n-1$ objectos. Há sempre duas possibilidades. Conclui-se que o número de maneiras de etiquetar os objectos é

$$2 \times \underset{n \text{ vezes}}{\cdots} \times 2 = 2^n.$$

Vimos como demomnstrar esta identidade sem usar o binómio de Newton, no entanto há muitas outras que se podem obter. Experimenta $x = 1$ e $y = -1$. A vantagem da binómio de Newton é que ocupa muito menos espaço de memória e, como tal, vale a pena decorá-lo.

EXERCÍCIOS

(3) Uma taça de fruta tem 10 bananas, 20 pêssegos e 5 maçãs.

  (a) Calcula o número de combinações de três frutos de tipo diferente.
  (b) Calcula o número de combinações de dois frutos de tipo diferente.
  (c) Calcula o número de combinações de quatro frutos de dois tipos diferentes.
  (d) Calcula o número de combinações de três frutos do mesmo tipo.

(4) Seja X um conjunto com n elementos. Calcula o número de escolhas possíveis de dois subconjuntos disjuntos de r e s elementos, respectivamente. [E se $r = s$?]

(5) O mesmo exercício que o anterior mas em que os dois subconjuntos possam intersectar-se num elemento.

(6) De quantas maneiras diferentes se podem dispor em fila 5 homens e 4 mulheres, de modo que os homens ocupem os lugares ímpares? E de modo que as mulheres fiquem juntas?

(7) De quantas maneiras se pode escolher três ou mais pessoas de entre um grupo de 12?

(8) Considere os inteiros positivos menores do que 10^{17}. Quantos existem com os digitos por ordem crescente?

(9) São dadas 14 bolas das quais 5 são pretas, 5 são brancas e 4 são azuis. Queremos distribuí-las por 3 sacos distintos, α, β, γ, de modo a que em cada saco fique pelo menos uma bola de cada cor e no máximo três pretas e duas azuis. Quantas distribuições há deste tipo?

(10) Sejam A, B e C conjuntos de a, b e c elementos respectivamente. Seja D um subconjunto de $A \cup B \cup C$ e denotemos por d o número dos seus elementos. Mostra que se $d > b + c$ então $D \cap A$ é não-vazio e se $d > c$ então $D \cap (A \cup B)$ é não-vazio.

(11) [IMO 1972] Mostra que dados 10 números pertencentes ao conjunto $\{10, 11, 12, \ldots, 99\}$ existem dois subconjuntos disjuntos deste conjunto cujos elementos têm soma igual à soma desse 10 números.

(12) Consideremos a sequência $(1, 2, 3, 4)$. Uma *permutação* dos elementos desta sequência consiste num rearranjo da ordem em que aparecem os números 1, 2, 3 e 4. Por exemplo $(1, 2, 4, 3)$ e $(4, 1, 2, 3)$ são permutações não-triviais. A segunda é exemplo de uma permutação que não deixa nenhum número no seu lugar original. Mostra que o número de permutações de n objectos que não deixam nenhum objecto no mesmo lugar é dado por

$$n! \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{1}{n!} \right).$$

(13) [IMO 1987] Seja $p_n(k)$ o número de permutações de n objectos que deixam exactamente k objectos no seu lugar. Mostra que $p_n(1) + 2p_n(2) + 3p_n(3) + \cdots + np_n(n) = n!$.