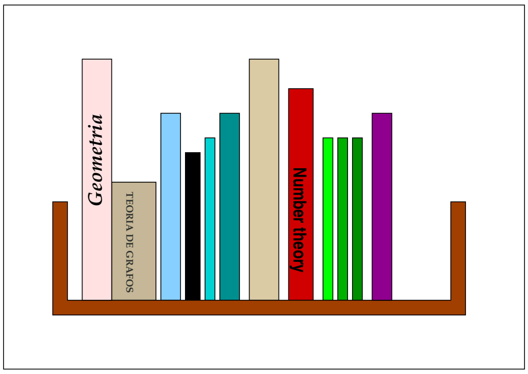
Coeficientes binomiais

Se tivermos n livros distintos e os quisermos arrumar numa prateleira, de quantas maneiras o podemos fazer?

A resposta é mais ou menos óbvia. Começamos com um livro qualquer que colocamos em primeiro lugar, digamos, encostado à parede do lado esquerdo. De seguida pegamos num dos livros que restam e colocamos ao lado do primeiro e assim sucessivamente até esgotarmos todos os livros que queremos arrumar.



O que se obtém é um de vários *arranjos* possíveis. O número de arranjos possíveis calcula-se da forma seguinte: para o primeiro livro tenho n possibilidades (porque há n livros para arrumar), já para o segundo há $n-1$ livros por onde escolher; etc... O número total de arranjos possíveis é dado por:

$$n \times (n-1) \times (n-2) \times (n-3) \times \cdots \times 2 \times 1.$$

Como é complicado estar sempre a usar "$\cdots$" para representar o número de arranjos de um conjunto de objectos vamos introduzir a notação de *factorial*. Seja k um número natural, então $k!$ denota o produto $k \times (k-1) \times (k-2) \times (k-3) \times \cdots \times 2 \times 1$. Este produto designa-se por *factorial de k*.

Olhemos agora para um problema mais complexo.

Suponhamos que temos n livros arrumados numa prateleira e que queremos emprestar r livros. Há-que retirar r livros da prateleira e não importa a ordem em que o faça. Quantos conjuntos diferentes de r livros posso retirar?

Para resolver este problema vamos arranjar uma maneira de distinguir os livros que se retiram e os que ficam sem os retirarmos da prateleira. Assim, digamos que eu coloco uma etiqueta verde em r livros que retirarei e uma etiqueta vermelha em $n-r$ livros que me comprometo a deixar na prateleira. O problema de determinar o número de conjuntos de r livros que posso retirar, pode reformular-se nos seguintes termos. Determinar o número de possíveis arranjos de r etiquetas verdes e $n-r$ etiquetas vermelhas, sendo que cada etiqueta é colada num só livro e cada um dos n livros tem apenas uma etiqueta. Se quisessemos distinguir cada etiqueta das restantes, como no caso dos livros em que cada um se distingue dos restantes, a resposta era $n!$. No entanto as etiquetas verdes são todas iguais entre si e as vermelhas também, e para além disso não tem sentido, na nossa reformulação do problema, distinguir entre etiquetas da mesma cor. Conclui-se pois, que a resposta não é $n!$. Este número é demasiado grande, conta os arranjos em que foi tido em conta o número de arranjos das etiquetas da mesma cor. Ora arranjos das etiquetas verdes há $r!$ (porque há r etiquetas verdes) e arranjos das etiquetas vermelhas há $(n-r)!$. Assim, com $n!$ estamos a contar cada conjunto de r livros possível exactamente $r!(n-r)!$ vezes a mais. A resposta ao nosso problema é pois

$$\frac{n!}{r!(n-r)!}.$$

Denotemos a fracção $\frac{n!}{r!(n-r)!}$ por $\binom{n}{r}$. O número $\binom{n}{r}$ designa-se por *coeficiente binomial*. Ele é o número de subconjuntos de r elementos que se podem extrair de um conjunto de n elementos. É também o número de arranjos possíveis de r bolas pretas e $n-r$ bolas brancas que se colocam em n caixas de tal forma que cada caixa contenha uma e uma só bola.

EXERCÍCIOS

(1) Mostra que

(a) $\binom{n}{n} = \binom{n}{0} = 1$;

(b) $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$;

(c) $\binom{n}{k+1} = \binom{n}{k}\frac{n-k}{k+1}$;

(d) $\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}$.

(2) Constrói o *triângulo de Pascal*. Começa por escrever o número "1" na primeira linha. Na linha de baixo de forma a obter-se um triângulo, dois números "1", imediatamente à esquerda e imediatamente à direita do 1 da primeira linha. Na terceira linha, imediatamente à esquerda do primeiro "1" da segunda linha, escreve um "1". De seguinda escreve o resultado da soma dos

dois números imediatamente acima e termina (sempre) com mais um número "1", etc...

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 2 & & 1 & & \\
 & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\
1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots
\end{array}$$

O resultado é um triângulo em que qualquer número diferente de 1 se pode obter como a soma dos dois números da linha de cima imediatamente à sua esquerda e à sua direita. Numera as linhas de 0 até ∞, de cima para baixo, e as posições numa dada linha j de 0 até j, da esquerda para a direita. Mostra que o número na posição i da linha j é dado por $\binom{j}{i}$.