Vamos finalmente usar as ideias do "truque" para mostrar que o mínimo invocado na definição dos números de Ramsey existe. Mostraremos que

$$\boxed{R(r,s) \leq R(r-1,s) + R(r,s-1).}$$

A ideia é a de sempre: vamos mostrar que, para $n = R(r-1,s) + R(r,s-1)$, em qualquer coloração de K_n a azul e verde existe sempre ou um subgrafo K_r azul, ou um subgrafo K_s verde. Seja v_1 um vértice de K_n escolhido ao acaso. Incidem sobre este vértice $n - 1 = R(r-1,s) + R(r,s-1) - 1$ arestas. Temos duas hipóteses ou $R(r-1,s)$ destas arestas são azuis ou $R(r,s-1)$ são verdes; caso

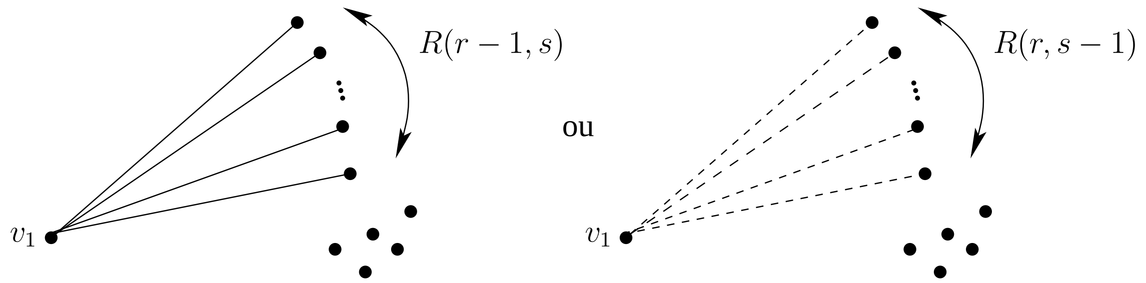

Figura 5: O truque, revisitado.

contrário o número de arestas que incidem em v_1 seria inferior a $R(r-1,s) + R(r,s-1) - 1$. No primeiro caso, entre as arestas dos vértices nas extremidades das arestas azuis ou existe um subgrafo completo K_s ou existe um subgrafo K_{r-1} de arestas azuis, que, contando com as arestas que incidem sobre v_1, dá origem a um subgrafo completo, K_r do grafo inicial de arestas azuis. No segundo caso, raciocinamos de maneira análoga ▲

Podemos já aplicar esta fórmula na resolução do Exercício 11. (Em relação àquele exercício, a ideia é que tu o consigas resolver sem usar esta fórmula; aqui, apenas estamos a ilustar a sua utilidade.) De facto, no Exercício 11 pede-se que mostres que $R(5,3) \leq 14$. Aplicando a fórmula que acabámos de demonstrar, tem-se;

$$R(5,3) \leq R(4,3) + R(5,2) = R(4,3) + 5 \leq 9 + 5 = 14.$$

Nota que foi necessário usar o Exercício 10. Se só usarmos a fórmula, o que se obtém é:

$$R(5,3) \leq R(4,3) + R(5,2) = R(4,3) + 5 \leq R(3,3) + R(4,2) + 5 = 6 + 4 + 5 = 15;$$

o que também é verdade... Longe de dar, por si só, um <u>bom</u> limite superior (como acabámos de constatar), o mais importante desta fórmula é que dá pelo menos *um* limite superior:

$$R(r,s) \leq R(r-1,s) + R(r,s-1) \leq R(r-1,s) + R(r-1,s-1) + R(r-1,s-1) + R(r,s-2) \leq \cdots$$

Eventualmente os números do lado direito da desigualdade são todos números de Ramsey da forma $R(a, 2)$ ou $R(2, b)$, que sabemos valerem a e b, respectivamente. Assim à custa dos números $R(a, 2)$ consegue-se mostrar a existência do mínimo a que se refere a definição de $R(r, s)$ e consequentemente mostra-se que $R(r, s)$ está bem-definido. A propósito, esta demonstração é um bom exemplo duma demonstração não-construtiva. Provámos que existía o mínimo sem dar um processo de o calcular.

Falemos de mais uma aplicação da teoria dos números de Ramsey. Consideremos o seguinte problema.

> Três clubes universitários de atletismo (e.g. Coimbra, Lisboa e Porto) organizaram entre si uma maratona comemorativa do terceiro aniversário da construção da mais moderna pista de tartan do país na nobre vila de Alguidares de Baixo. Durante a competição, um alguideirense observou que entre os 16 atletas participantes havia pelo menos um cujo número de inscrição era a soma de dois números de inscrição de dois atletas do *mesmo clube*. Mostra que, não importa como estão distribuídos os números de inscrição $\{1, \ldots, 16\}$ pelos 16 atletas; existe um atleta cujo número de inscrição ou é soma de dois números de inscrição de colegas de clube ou é o dobro de um número de inscrição de um colega de clube.

Eis como nos propomos resolver este problema. Em primeiro lugar, motivemos a nossa construção. Suponhamos que x, y e z são naturais entre 1 e 16 tais que $z = x + y$. Então existem $1 \leq i, j, k \leq 17$, tais que $z = k - i$, $x = k - j$ e $y = j - i$. (Exercício!) Reciprocamente, dados $1 \leq i, j, k \leq 17$ existe um número entre $|k - i|$, $|k - j|$ e $|j - i|$ que é soma dos outros dois. Vamos construir um grafo com 17 vértices. Numeramos os vértices de 1 a 17 e colorimos as aresta que une o vértice i ao vértice j com uma das cores "Coimbra", "Lisboa" e "Porto", se e só se o número de inscrição $|i - j|$ foi atribuído a um atleta do clube da cidade com o mesmo nome. Conclusão:

> Basta mostrar que existe um subgrafo K_3 cujas arestas são todas da mesma cidade!!, i.e., basta mostrar que em qualquer coloração de um grafo completo K_{17} existe pelo menos um subgrafo K_3 cujas arestas são da mesma cor. (V. Exercício 12.)

Com a resolução deste problema quisemos introduzir a ideia que, para certos problemas de combinatória, é possível codificar os dados do problema sob a forma de um grafo.

EXERCÍCIOS

(19) [IMO 1978] Os membros de uma associação internacional pertencem a uma de 6 nacionalidades (sim, nenhum tem dupla nacionalidade!). Ao todo há 1978 sócios. Mostra que existe pelo menos um sócio cujo número é a soma de dois números de sócios de dois seus compatriotas ou o dobro de um número de sócio de um seu compatriota.

(20) Mostra que se etiquetarmos cada número do conjunto $\{1, \ldots, 17\}$ com uma de duas cores, então existe pelo menos um número que é soma de três outros números da sua cor.