Teoria de Grafos

O texto que se segue é dedicado à teoria de grafos. Nesta primeira versão demos enfâse à Teoria de Ramsey, por ser um tema que já apareceu diversas vezes e sob diversas formas nas IMO. A teoria de grafos é uma área da combinatória das mais activas da investigação matemática. Ela está presente nas modelações de problemas de optimização (para as ciências puras e aplicadas) e é no seu contexto que se desenrola a solução do problema das quatro cores (agora o Teorema das quatro cores). Foi uma conjectura, desde cerca de 1850, que seria possível colorir as regiões de um mapa qualquer com apenas 4 cores de forma a que em nenhum par de regiões com fronteira comum essas regiões tivessem a mesma cor. A resposta afirmativa a esta pergunta foi dada nos anos 70 do século passado, usando a teoria de grafos (e um computador); formalizando a questão da seguinte forma: dado um qualquer mapa, associamos-lhe um grafo fazendo corresponder a cada região um vértice e para cada dois vértices uma aresta se e só se as duas regiões correspondentes têm uma porção de fronteira em comum.

> Para definir um grafo dá-se um conjunto de vértices $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ e um conjunto de pares de vértices $A = \{\{v_{i_1}, v_{j_1}\}, \ldots, \{v_{i_n}, v_{j_n}\}\}$ onde $v_{i_r} \neq v_{j_r}$, cujos elementos de designam arestas.

Repara que o conjunto das arestas A não tem de conter todos os possíveis pares de vértices. Se um grafo com n vértices é tal que o seu conjunto de arestas contém todos os possíveis pares de vértices, então o grafo diz-se completo. Estes grafos denotam-se por K_n. O grafo K_3 também se designa por triângulo, K_4 por quadrilatero completo, etc. Embora não seja a maneira como se definem grafos, é útil ter uma representação geométrica dos grafos. Nesta figura, vemos à esquerda uma representação

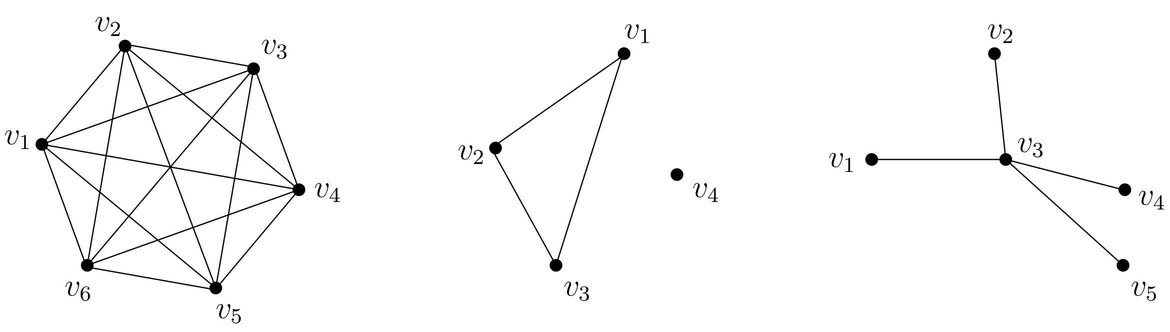

Figura 1: Exemplos de grafos

de K_6. Este grafo é um grafo com 6 vértices, em que quaisquer dois vértices estão ligados por uma aresta. No meio da figura, está um grafo contendo um vértice que não tem arestas a incidir. O grafo da direita é o grafo das fronteiras de 5 países da Europa. A Alemanha em v_3 e nos restantes vértices, a Áustria, a Dinamarca, a Holanda e a Polónia.

Seja G um grafo. Um caminho em G é uma sequência de arestas de G, digamos $(\{v_{i_1}, v_{j_1}\}, \ldots, \{v_{i_r}, v_{j_r}\})$ tal que $v_{j_a} = v_{i_{a+1}}$, para todo $1 \leq a \leq r-1$. Um grafo diz-se conexo se para quaisquer dois vértices existe um caminho que começa num vértice e termina no outro. Um ciclo de comprimento r é um caminho constituído por $r+1$ vértices, onde não ocorre repetição de arestas e em que o primeiro vértice é igual ao último vértice. Se um grafo não tem ciclos então diz-se uma *árvore*.

Na Figura 1 apenas o grafo do meio não é conexo. A sequência $(\{v_1, v_2\}, \{v_2, v_3\})$ é um caminho em K_6 e no grafo do meio, onde até faz parte de um ciclo, mas não é um caminho no grafo da direita. Este último grafo não contém ciclos, é uma árvore.

EXERCÍCIOS

(1) Mostra que o grafo completo K_n tem $\binom{n}{2}$ arestas.

(2) O número de arestas que incide num vértice designa-se por *grau* desse vértice. Mostra que um grafo com mais do que dois vértices tem pelo menos dois vértices do mesmo grau.

(3) Mostre que num grafo a soma dos graus dos seus vértices é um número par.

(4) [**IMO 1991**] Seja G um grafo com k arestas, conexo. Mostra que é possível numerar as arestas de G de 1 a k de forma a que para cada vértice que pertença a duas ou mais arestas, o máximo divisor comum entre os números das arestas que nele incidem é 1.

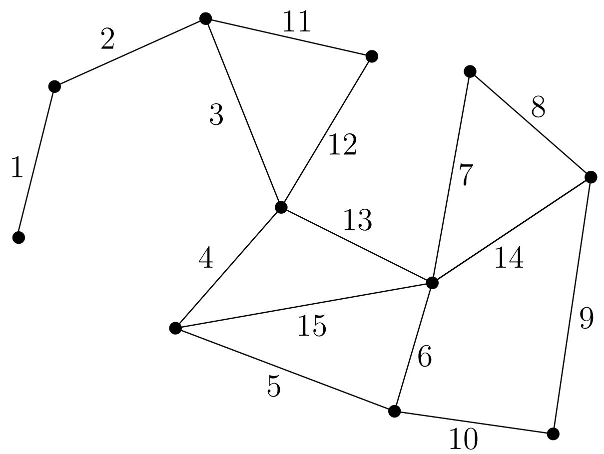

Figura 2: Por exemplo...