Desigualdades:

- **Cauchy-Schwarz:** $(x_1y_1 + \cdots + x_ny_n)^2 \leq (x_1^2 + \cdots + x_n^2)(y_1^2 + \cdots + y_n^2)$
- **Triangular:** $\sqrt{(x_1+y_1)^2 + \cdots (x_n+y_n)^2} \leq \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2} + \sqrt{y_1^2 + \cdots + y_n^2}$
- **Aritmética-Geométrica:** $\dfrac{x_1 + \cdots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 \cdots x_n}$

EXERCÍCIOS

(1) Sejam $x_1, \ldots, x_n$ números reais positivos e $y_1, \ldots, y_n$ uma permutação qualquer dos x_i. Mostra que:

(a) $x_1y_1 + \cdots + x_ny_n \leq x_1^2 + \cdots + x_n^2$

(b) $\dfrac{x_1}{y_1} + \cdots + \dfrac{x_n}{y_n} \geq n$

(c) $x_1^{y_1} + \cdots + x_n^{y_n} \leq x_1^{x_1} + \cdots + x_n^{x_n}$

(2) Mostra que se x, y, z são reais positivos, então $(x+y)(y+z)(z+x) \geq 8xyz$.

(3) Mostra que $n! \leq \left(\dfrac{n+1}{2}\right)^n$.

(4) Mostra que se $x, y, z > 0$ verificam $xyz = 1$, então $x^2+y^2+z^2+xy+yz+zx \geq 2(\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z})$

(5) Mostra que se a, b, c são reais positivos tais que $a+b+c \geq abc$, então também $a^2+b^2+c^2 \geq abc$.

(6) Mostra que se $x, y > 1$, então $\dfrac{x^2}{y-1} + \dfrac{y^2}{x-1} \geq 8$.

(7) Determina todas as soluções positivas de $\begin{cases} w+x+y+z = 12 \\ wxyz = wx+wy+wz+xy+xz+yz+27. \end{cases}$

(8) Mostra que se x, y, z são reais positivos, $x^4 + y^4 + z^2 \geq \sqrt{8}xyz$.

(9) Sejam x, y reais positivos e n, m inteiros positivos. Mostra que $(n+m)x^ny^m \leq nx^{n+m}+my^{n+m}$.

(10) Prova que se a, b, c são reais positivos, então $(a+b)(a+c) \geq 2\sqrt{abc(a+b+c)}$.

(11) Mostra que se x, y, z são reais positivos e n é um inteiro positivo, então $x^n + y^n + z^n \geq xy^{n-1} + yz^{n-1} + zx^{n-1}$.