Desigualdades Aritméticas

1. Mostra que
$$|a+b| \leq |a| + |b|,$$
para todos os números reais a e b (**desigualdade triangular**). Quando é que se tem a igualdade?

   Generaliza a desigualdade anterior mostrando que
$$|x_1 + \cdots + x_n| \leq |x_1| + \cdots + |x_n|,$$
e discute em que condições é que a igualdade ocorre.

2. Mostra que
$$\big||a| - |b|\big| \leq |a-b|.$$

3. Mostra que as médias harmónica, geométrica e aritmética de dois números $a, b > 0$ estão relacionadas da forma seguinte:
$$\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} \leq \sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$$
(**desigualdade MH–MG–MA**). Generaliza a desigualdade anterior mostrando que
$$\frac{n}{\frac{1}{x_1}+\cdots+\frac{1}{x_n}} \leq \sqrt[n]{x_1 \ldots x_n} \leq \frac{x_1+\cdots+x_n}{n},$$
para $x_1, \ldots, x_n > 0$.

4. Para $x, y, z \geq 0$, mostra que
$$(x+y)(y+z)(x+z) \geq 8xyz.$$

5. Para $x, y, z > 0$, mostra que
$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z} \geq \frac{1}{\sqrt{xy}}+\frac{1}{\sqrt{yz}}+\frac{1}{\sqrt{zx}}.$$

6. Para $x, y, z \geq 0$, mostra que
$$x^2+y^2+z^2 \geq x\sqrt{y^2+z^2}+y\sqrt{x^2+z^2}.$$

7. Sendo $a_1, \ldots, a_n > 0$ e $b_1, \ldots, b_n$ uma permutação de $a_1, \ldots, a_n$, mostra que
$$\frac{a_1}{b_1}+\cdots+\frac{a_n}{b_n} \geq n.$$

8. Para $n \in \mathbb{N}$, seja
$$H_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n},$$
o n-ésimo número harmónico. Mostra que
$$n\sqrt[n]{n+1} < n + H_n, \quad n \geq 2.$$

9. Se $a, b, c > 0$ são tais que $a + b + c = 1$, mostra que
$$\left(\frac{1}{a} + 1\right)\left(\frac{1}{b} + 1\right)\left(\frac{1}{c} + 1\right) \geq 64.$$

10. Dados $x_1, \ldots, x_n$ número reais positivos, mostra que
$$(x_1 + \cdots + x_n)\left(\frac{1}{x_1} + \cdots + \frac{1}{x_n}\right) \geq n^2.$$

– ∘ –

11. Dados números reais com
$$a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n \quad \text{e} \quad b_1 \leq b_2 \leq \cdots \leq b_n,$$
considera uma qualquer permutação $b'_1, b'_2, \ldots, b'_n$ de $b_1, b_2, \ldots, b_n$.
Mostra que
$$a_1b_1 + \cdots + a_nb_n \geq a_1b'_1 + \cdots + a_nb'_n \geq a_1b_n + \cdots + a_nb_1$$
(**desigualdade do rearranjo**).

12. Estabelece a desigualdade do Problema 7 usando a desigualdade do rearranjo.

13. Para qualquer permutação $a'_1, \ldots, a'_n$ de $a_1, \ldots, a_n$ mostra que
$$a_1^2 + \cdots + a_n^2 \geq a_1a'_1 + \cdots + a_na'_n.$$

14. Dados $a, b, c > 0$, prova que
$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}.$$

15. Tenta obter a desigualdade MH–MG–MA (ver Exercício 3) a partir da desigualdade do rearranjo.

16. Se $a_1 \leq \cdots \leq a_n$ e $b_1 \leq \cdots \leq b_n$, mostra que
$$\frac{a_1b_1 + \cdots + a_nb_n}{n} \geq \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n} \times \frac{b_1 + \cdots + b_n}{n}$$
(**desigualdade de Tchebyshev**).

17. Mostra que a média aritmética e a média quadrática estão relacionadas pela desigualdade

$$\left|\frac{x_1+\cdots+x_n}{n}\right| \leq \sqrt{\frac{x_1^2+\cdots+x_n^2}{n}}.$$

18. Se $x_1,\ldots,x_n,y_1,\ldots,y_n$ são números reais, mostra que

$$|x_1y_1+\cdots+x_ny_n| \leq \sqrt{x_1^2+\cdots+x_n^2}\,\sqrt{y_1^2+\cdots+y_n^2}$$

(**desigualdade de Cauchy–Schwarz**).

19. Mostra que

$$a^2+b^2+c^2 \geq ab+bc+ca.$$

20. Se a,b,c são números positivos com $a+b+c=1$, mostra que

$$ab+bc+ca \leq \frac{1}{3}.$$

21. Mostra que

$$|a+b| \leq \sqrt{2}\sqrt{a^2+b^2}.$$

22. Se $a_1,\ldots,a_n$ são números positivos com $a_1+\cdots+a_n=1$, mostra que

$$\frac{a_1}{\sqrt{1-a_1}}+\cdots+\frac{a_n}{\sqrt{1-a_n}} \geq \frac{\sqrt{a_1}+\cdots+\sqrt{a_n}}{\sqrt{n-1}}.$$

23. Sejam $x_1,\ldots,x_n$ números reais tais que a soma de quaisquer $n-1$ deles é maior do que o número deixado de fora da soma. Sendo $s=x_1+\cdots+x_n$, mostra que

$$\frac{x_1^2}{s-2x_1}+\cdots+\frac{x_n^2}{s-2x_n} \geq \frac{s}{n-2}.$$

24. Para $x>-1$ e $n\in\mathbb{N}$ mostra que

$$(1+x)^n \geq 1+nx$$

(**desigualdade de Bernoulli**).

– ○ –

Uma função $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ diz-se <u>convexa</u> se para todo o $x,y\in[a,b]$ e para todo o $\alpha\in[0,1]$ se tem

$$f(\alpha x+(1-\alpha)y) \leq \alpha f(x)+(1-\alpha)f(y).$$

– ○ –

25. Se f é uma função convexa em $[a,b]$, então para todo o $x_1,\ldots,x_n \in [a,b]$ e $\alpha_1,\ldots,\alpha_n \in [0,1]$ com $\alpha_1+\cdots+\alpha_n=1$, mostra que

$$f\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n}\alpha_i f(x_i)$$

(**desigualdade de Jensen**).

26. Retoma o Problema 22 à luz da desigualdade de Jensen.

27. Se $x_1,\ldots,x_n$ são números positivos maiores ou iguais a 1, prova que

$$\frac{1}{1+x_1}+\cdots+\frac{1}{1+x_n} \geq \frac{n}{\sqrt[n]{x_1\cdots x_n}+1}.$$

28. Sejam x,y números positivos e $p,q>1$ com $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. Mostra que

$$xy \leq \frac{1}{p}\,x^p+\frac{1}{q}\,y^q$$

(**desigualdade de Young**).

29. Se $x_1,\ldots,x_n,y_1,\ldots,y_n$ são números positivos e $p,q>1$ com $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, mostra que

$$\sum_{i=1}^{n}x_i y_i \leq \left(\sum_{i=1}^{n}x_i^p\right)^{1/p}\left(\sum_{i=1}^{n}y_i^q\right)^{1/q}$$

(**desigualdade de Hölder**).

30. Se $x_1,\ldots,x_n,y_1,\ldots,y_n$ são números positivos e $p\geq 1$, mostra que

$$\left(\sum_{i=1}^{n}(x_i+y_i)^p\right)^{1/p} \leq \left(\sum_{i=1}^{n}x_i^p\right)^{1/p}+\left(\sum_{i=1}^{n}y_i^p\right)^{1/p}$$

(**desigualdade de Minkowski**).

Pistas de Resolução

Problemas 1, 2: Recorda que o módulo de um número real x, que representamos por $|x|$, é definido por $|x| = x$, quando $x \geq 0$, e $|x| = -x$, quando $x < 0$.

Assim, é verdade que $|x|^2 = x^2$, para todo o número real x.

Problema 3: Verifica que basta provar a segunda desigualdade.

Para generalizar a desigualdade a n números, usa o princípio de indução matemática. Num primeiro passo, verifica que a desigualdade é válida para $n = 2$. Depois, mostra que se a desigualdade é válida para o número natural n também é válida não só para o número natural $2n$ como também é válida para o número natural $n - 1$.

Neste último caso, faz $g = \sqrt[n-1]{a_1 \dots a_{n-1}}$ e aplica a desigualdade aos números $a_1, \dots, a_{n-1}, g$.

Relativamente à ocorrência da igualdade, basta analisar os passos da demonstração por induão.

Problema 4: Usa a desigualdade MG–MA para cada um dos factores do primeiro membro.

Problema 5: Usa a desigualdade MH–MG para cada par de parcelas do primeiro membro.

Problema 6: Usa a desigualdade MG–MA ...

Problema 7: Aplica a desigualdade MG–MA aos números $\frac{a_1}{b_1}, \dots, \frac{a_n}{b_n}$.

Problema 8: Verifica que a soma $n + H_n$ pode ser escrita na forma $1 + 1 + 1 + \frac{1}{2} + 1 + \frac{1}{3} + \cdots + 1 + \frac{1}{n}$ e aplica a desigualdade MG–MA.

Problema 9: Desenvolve o primeiro membro da desigualdade e usa a desigualdade MH–MG para mostrar que ele é maior ou igual que $(1 + \frac{1}{\sqrt[3]{abc}})^3$. A seguir usa a desigualdade MG–MA e mostra que $\sqrt[3]{abc} \leq \frac{1}{3}$.

Problema 10: Usa as desigualdades MH–MG e MG–MA ...

Problema 11: Verifica que basta analisar o caso em que a permutação "troca" apenas dois dos números iniciais.

Problemas 12, 13: Sem perda de generalidade, verifica que podes admitir que $0 < a_1 \leq \cdots \leq a_n$.

Problema 14: Sem perda de generalidade, podes assumir que $a \leq b \leq c$ o que implica que $\frac{1}{b+c} \leq \frac{1}{a+c} \leq \frac{1}{a+b}$ ...

Problema 15: Toma $a_1 = x_1/G, a_2 = x_1x_2/G^2, \dots, a_n = x_1 \dots x_n/G^n$ com $G = \sqrt[n]{x_1 \dots x_n}$.

Problema 16: Usa várias vezes a desigualdade do rearranjo ...

Problema 17: Olha bem para a desigualdade de Tchebyshev ...

Problema 18: Começa por verificar que se todos os x_i's ou todos os y_i's forem iguais a zero, a desigualdade é válida. A seguir, aplica o Problema 13 aos números $\frac{x_1}{X}, \ldots, \frac{x_n}{X}, \frac{y_1}{Y}, \ldots, \frac{y_n}{Y}$, onde $X = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$ e $Y = \sqrt{\sum_{i=1}^n y_i^2}$.

Problema 19: Usa a desigualdade de Cauchy–Schwarz ...

Problema 20: Desenvolve o quadrado $(a+b+c)^2$.

Problema 21: Repara que $(a+b)^2 = (a \cdot 1 + b \cdot 1)^2$ ...

Problema 22: Representa por A o primeiro membro da desigualdade e verifica que $A = \sum_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{1-a_i}} - \sum_{i=1}^n \sqrt{1-a_i}$. Usa agora a desigualdade MG–MA no primeiro somatório e a desigualdade de Cauchy–Schwarz no segundo.

Problema 23: Começa por provar que $s > 2x_k$ para todo o $k = 1, \ldots, n$. A seguir considera a decomposição $x_k = \dfrac{x_k}{\sqrt{s-2x_k}} \cdot \sqrt{s-2x_k}$.

Problema 24: Aplica a desigualdade MG–MA aos n números $1, \ldots, 1, 1+nx$.

Problema 25: Usa de forma apropriada a definição de função convexa.

Problema 26: Usa o facto da função $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x}}$ ser convexa para $x \in]0,1[$.

Problema 27: Usa o facto da função $f(x) = \frac{1}{1+e^x}$ ser convexa para $x > 0$.

Problema 28: Verifica que $xy = e^{\frac{1}{p}\log(x^p) + \frac{1}{q}\log(y^q)}$ e usa o facto da função exponencial ser convexa em $\mathbb{R}$.

Problema 29: Começa por verificar que basta analisar o caso em que $\sum_{i=1}^n x_i^p = 1$ e $\sum_{i=1}^n y_i^p = 1$. A seguir aplica a desigualdade de Young aos produtos $x_i y_i$.

Problema 30: Começa por verificar que $(x_i+y_i)^p = x_i(x_i+y_i)^{p-1} + y_i(x_i+y_i)^{p-1}$ e a seguir usa a desigualdade de Hölder.

Bibliografia: Manfrino, R.B., Ortega, J.A.G., Delgado, R.V. (2005). Inequalities. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas, Instituto de Matemáticas, Universidad Nacional Autónoma de México.