por Amílcar Branquinho e Alexander Kovačec
[Departamento de Matemática, Universidade de Coimbra]

Coordenadas Trilineares e Baricêntricas

“Barys” (do grego $\beta\alpha\rho\iota\sigma$) significa *pesado*. Se contemplarmos um segmento AB como uma alavanca e desejarmos equilibrar um peso α aplicado em A com um peso β aplicado em B, então o fulcro da alavanca deve estar exactamente no ponto $P=\alpha A+\beta B$. Isto é consequência da lei de Arquimedes mencionada na *Gazeta de Matemática* 155.

Caro Leitor,

Entre as frases explosivas que se costumam disparar a investigações e resultados matemáticos está a famosa “para que é que isto serve?” Nós, matemáticos, também não ajudamos muito pois, por uma parte, acreditamos em geral que a matemática é uma arte com uma justificação essencialmente estética e, por outro lado, não costumamos estar empenhados nas suas aplicações reais, que consideramos propriedade privada de engenheiros e físicos. Desta vez, esperamos alegrar-vos com uma teoria geométrica de grande interesse na resolução de problemas complexos sobre triângulos.

Definamos para quaisquer quatro pontos W, X, Y e Z, com $Y\neq Z$ pertencentes a uma recta o quociente de segmentos orientados (ou vectores) da seguinte forma:

$$\frac{\overrightarrow{WX}}{\overrightarrow{YZ}}=\varepsilon\frac{|WX|}{|YZ|}$$

em que $|WX|$ denota a distância entre W e X, $|YZ|$ a distância entre Y e Z e ε vale 1 se os vectores $\overrightarrow{WX}$ e $\overrightarrow{YZ}$ têm o mesmo sentido ou -1 no caso contrário. Sejam agora A,B dois pontos (distintos) no plano ou no espaço e designemos $g=g_{AB}$ a recta por eles definida. Para qualquer ponto $P\in g$ define-se (α,β) como as *coordenadas baricêntricas* de P (relativamente a A, B), por

$$\alpha=\frac{\overrightarrow{PB}}{\overrightarrow{AB}}\quad \text{e}\quad \beta=\frac{\overrightarrow{AP}}{\overrightarrow{AB}}.$$

Usaremos também a notação $P=\alpha A+\beta B$, que retém a informação dos pontos relativamente aos quais se calculam as coordenadas baricêntricas.

Se contemplarmos um segmento AB como uma alavanca e desejarmos equilibrar um peso a aplicado em A, com um peso β aplicado em B, então o fulcro da alavanca deve estar exactamente no ponto $P=\alpha A+\beta B$. Isto é consequência da lei de Arquimedes mencionada na *Gazeta de Matemática* 155.

Os sinais das coordenadas baricêntricas (α,β) de $P=\alpha A+\beta B$ dependem da posição de P relativamente aos pontos A,B. Ambas as coordenadas são positivas se e só se P está entre A e B, situação esta que denotamos por A-P-B. No caso A-P-B é fácil demonstrar que o ponto $P=\alpha A+\beta B$ divide o segmento AB na porção $\beta:\alpha$. Em qualquer caso, notemos que a soma das coordenadas baricêntricas de um ponto é sempre igual a 1.

Também é possível calcular as coordenadas baricêntricas de um ponto P usando cálculo vectorial. Para tal, escolha-se um ponto $O\notin g_{AB}$ e considerem-se os segmentos OA e OB. Traçando rectas paralelas às rectas de suporte de OA e OB, passando por P, determinam-se os pontos P_A e P_B. É claro $\overline{OP}=\overline{OP_A}+\overline{OP_B}$ (ver figura 1).

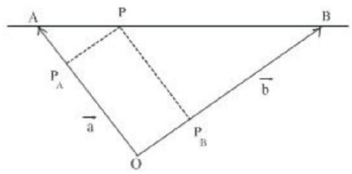

Figura 1

Tendo em conta a semelhança de triângulos, $\Delta AP_AP\approx\Delta AOB\approx\Delta PP_BB$, obtém-se

$$\frac{|OP_A|}{|OA|}=\frac{|P_BP|}{|OA|}=\frac{|PB|}{|AB|}\quad \text{e}\quad \frac{|OP_B|}{|OB|}=\frac{|P_AP|}{|OB|}=\frac{|AP|}{|AB|}.$$

Por outras palavras, sendo (α,β) as coordenadas baricêntricas de P relativamente a A e B, temos $\overrightarrow{OP}=\alpha\overrightarrow{OA}+\beta\overrightarrow{OB}$. Tendo o necessário cuidado com os sinais, sobretudo nos casos P-A-B e A-B-P, obtém-se igualmente $\overrightarrow{OP}=\alpha\overrightarrow{OA}+\beta\overrightarrow{OB}$. Assim, as coordenadas baricêntricas de P são as coordenadas da representação única de P enquanto combinação linear de $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$. Esta forma de calcular as coordenadas baricêntricas é importante, mas não é tão satisfatória como a primeira, pois depende da escolha de O (um ponto *exterior* à recta).

Passemos agora às coordenadas baricêntricas em duas dimensões. Três rectas não concorrentes, ou três pontos não colineares do plano, determinam um triângulo ΔABC. A recta $c=g_{AB}$ define no plano dois semiplanos. Designamos por *semiplano positivo* e denotamo-lo por H^+_c, aquele semiplano que contém o interior do triângulo. No caso contrário, esse semiplano designa-se por *semiplano negativo* e denota-se por H^-_c. Procedendo de igual modo para as restantes rectas $a=g_{BC}$ e $b=g_{CA}$ obtemos H^+_a, H^-_a, H^+_b e H^-_b. As sete regiões determinadas pelas intersecções de três semiplanos estão etiquetadas pelos sinais na figura 2. (Um ponto em $H_a^+\cap H_b^+\cap H_c^-$ está na região (+,+,-) etc.)

Dado um ponto P qualquer do plano, sejam P_a, P_b e P_c as distâncias de P às rectas a, b e c, munidas dos sinais positivo ou negativo conforme P está no respectivo semiplano positivo ou negativo. Mais, sejam h_a, h_b e h_c as distâncias de A, B, C às rectas a, b e c; por outras palavras, considerem-se h_a, h_b e h_c as alturas do triângulo ΔABC.

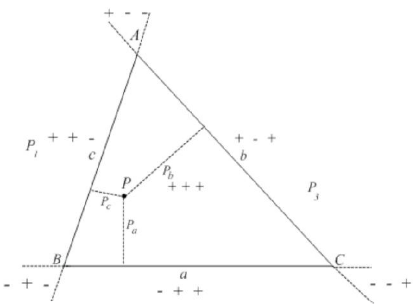

Figura 2

Definem-se as *coordenadas trilineares* e *coordenadas baricêntricas* do ponto P relativamente a A, B, C pelos ternos

$$\mathrm{tri}(P)=(p_a:p_b:p_c) \text{ e } \mathrm{bar}(P)=\left(\frac{p_a}{h_a},\frac{p_b}{h_b},\frac{p_c}{h_c}\right).$$

Com o uso dos "dois pontos" no caso das coordenadas trilineares queremos identificar ternos a menos de proporcionalidade. Concretamente, para qualquer real $r\neq 0$, considera-se $(p_a:p_b:p_c)=(rp_a:rp_b:rp_c)$.

Um ponto tem primeira coordenada baricêntrica nula se e só se pertencer à recta a, segunda coordenada baricêntrica nula se e só se pertencer à recta b e terceira coordenada baricêntrica nula se e só se pertencer à recta c; como é evidente, temos bar(A)=(1,0,0), bar(B)=(0,1,0) e bar(C)=(0,0,1). Mais uma vez, as coordenadas baricêntricas têm soma 1.

Problema 1.

Mostre que a soma das coordenadas baricêntricas de P é igual a 1.

Sugestão: calcule as áreas de alguns triângulos obtidos na figura 2 introduzindo certos segmentos adicionais.

Assim, do conhecimento sobre duas das três coordenadas baricêntricas podemos deduzir a sua terceira coordenada baricêntrica.

Problema 2.

Sejam $\vec{a}$ e $\vec{b}$ dois vectores aplicados num ponto O definindo em O um ângulo diferente de 0 e π. Sejam α, $\beta>0$. Então o vector $\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}$ define uma semi-recta com origem O. Em que razão divide esta semi-recta o segmento que liga as extremidades dos vectores $\vec{a},\vec{b}$?

Dado um triângulo e um seu vértice, uma *ceviana* é um segmento de recta que o une ao lado oposto do triângulo.

Problema 3.

Demonstre o Teorema de Ceva: *Num triângulo ΔABC, dados os pontos $X\in BC$, $Y\in CA$ e $Z\in AB$, as cevianas, AX, BY, CZ são concorrentes num ponto P fora das rectas de suporte dos lados de ΔABC se e só se*

$$\frac{\overline{BX}}{\overline{XC}}\cdot\frac{\overline{CY}}{\overline{YA}}\cdot\frac{\overline{AZ}}{\overline{ZB}}=1.$$

Problema 4.

Deduza a partir do Teorema de Ceva as seguintes proposições:

Canto Délfico
[Coordenadas Trilineares e Baricêntricas]

(I) As medianas de um triângulo intersectam-se num ponto designado *baricentro*.

(II) As bissectrizes de um triângulo intersectam-se num ponto designado *incentro*.

(III) As alturas de um triângulo intersectam-se num ponto, designado *ortocentro*.

(IV) Sejam T_a, T_b e T_c os pontos de tangência da circunferência inscrita em ΔABC, de lados a, b, c, respectivamente. Então as cevianas AT_a, BT_b e CT_c intersectam-se num ponto que se designa *ponto de Gergonne* ou *ponto de Nagel*.

Problema 5.

(I) Quais são as coordenadas baricêntricas do baricentro? E quais as do incentro? Em particular, mostre que as coordenadas trilineares do incentro I são tri(P)=($a:b:c$) onde a, b, c são os lados do triângulo, opostos aos vértices A, B, C, respectivamente.

(II) As coordenadas trilineares do circuncentro dum triângulo são dadas por

$$(\sin 2\hat{A} : \sin 2\hat{B} : \sin 2\hat{C}).$$

Problema 6.

(I) Sejam AX, BY, CZ cevianas de ΔABC concorrentes em I. Então vale:

$$\frac{\overrightarrow{AI}}{\overline{AX}} \cdot \frac{\overrightarrow{BI}}{\overline{BY}} \cdot \frac{\overrightarrow{CI}}{\overline{CZ}} \leq \frac{8}{27}$$

(II) No caso de I ser o incentro de ΔABC, então tem-se:

$$\frac{1}{4} \leq \frac{\overrightarrow{AI}}{\overline{AX}} \cdot \frac{\overrightarrow{BI}}{\overline{BY}} \cdot \frac{\overrightarrow{CI}}{\overline{CZ}} \leq \frac{8}{27}.$$