EXPERIÊNCIA IV: **Teoria Combinatória**

Objectivo: Nos textos anteriores fizemos já alusões ao conceito da *cardinalidade*, i.e. número de elementos de um conjunto. Nesta secção vamos primeiro identificar as cardinalidades de certos conjuntos finitos que surgem frequentemente em vários ramos da matemática, e depois provar o princípio da inclusão-exclusão com o qual se podem determinar cardinalidades importantes.

---

1. COMBINATÓRIA ENUMERATIVA

Tendo em conta as dificuldades, já mencionadas, em definir um conceito aparentemente tão inocente como o do próprio número natural e o seu entrelaçamento com a teoria dos ordinais e cardinais - cuja exposição pormenorizada convém aqui evitar - faremos as nossas deduções nesta secção partindo do seguinte axioma (demonstrável com as ditas teorias).

Axioma 1.1. *Seja Ω um universo finito, então existe uma única aplicação $|\cdot| : 2^{\Omega} \to \mathbb{Z}_{\geq 0}$ (chamada cardinal de ...) para a qual se tem o seguinte:*
i. Se $S \subseteq \Omega$ é conjunto singular, então $|S| = 1$.
ii. se M, N são subconjuntos disjuntos de Ω, então $|M \cup N| = |M| + |N|$.

O axioma formaliza o que sempre soubemos: se M, N são subconjuntos finitos disjuntos, então o número dos elementos da união destes conjuntos é igual à soma dos números de elementos em cada um destes conjuntos; ou seja: o número cardinal (simplesmente 'a cardinal') da união de dois conjuntos M, N disjuntos é igual a soma das cardinais dos conjuntos M, N. Notem que a função trivial que atribui 0 a todos os conjuntos satisaz ii. Assim vemos que i é importante. ii implica que $|\emptyset| = |\emptyset \cup \emptyset| = |\emptyset| + |\emptyset|$. Esta relação implica $|\emptyset| = 0$.

Para dar credibilidade adicional ao axioma, e consolidar os conhecimentos sobre cardinais e ordinais recomenda-se o seguinte exercício que podem fazer de duas maneiras: i. invocando apenas o axioma, ii. a medida desenvolvida no capítulo 0, recorrendo à teoria dos cardinais.

Exercício 1.1. Sejam $X, Y \subseteq \Omega$ conjuntos finitos.
a. Uma aplicação $f : X \to Y$, é sobrejectiva se, e somente se, $|f^{-1}(y)| \geq 1$ para cada $y \in Y$, e injectiva se, e somente se, $|f^{-1}(y)| \in \{0, 1\}$ para cada $y \in Y$.
b. $|X| = |Y|$ se, e somente se, existe uma aplicação bijectiva $f : X \to Y$.

Ao longo do capítulo vamos ainda precisar desta definição: uma função $f : X \to Y$ diz-se k-*para*-1, ($k \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$) se para cada $y \in Y$ se tem $|f^{-1}(y)| \in \{0, k\}$. Daí que dizer uma função é injectiva é dizer que ela é 1-para-1.

Problema 1.1. *Sejam $A_1, \ldots, A_k$ conjuntos finitos. Então*

$$|A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_k| = |A_1||A_2| \ldots |A_k| .$$

Vamos apresentar duas provas para este problema.

Prova 1. O facto parece tão óbvio que não há nada a provar: o produto cartesiano à direita é a família de todos os k-uplos $(a_1, \ldots, a_k)$ com $a_1 \in A_1, a_2 \in A_2, \ldots, a_k \in A_k$. Ora, podemos escolher a_1 de $|A_1|$ maneiras, a_2 de $|A_2|$ maneiras, ..., a_k de $|A_k|$ maneiras de modo que obtemos evidentemente o número à direita. □

O argumento que acabámos de dar é rápido. Convém que o leitor satisfeito com ele, mantenha a sua 'ingenuidade' para avançar em matemática. Por outro lado, o argumento não satisfaz 'fundamentalistas': afinal, uma 'escolha' não é um conceito bem definido, não se vê muito bem onde entra o conceito da cardinalidade, etc. Assim a segunda prova assenta sobre princípios mais bem aceites em matemática.

Prova 2. Faz-se uma prova por indução sobre k. Para $k = 1$ não há nada a provar. Para $k = 2$ chamemos aos conjuntos em causa temporariamente A, B. Selecionemos $A = \{1, \ldots, a\}, B = \{1, \ldots, b\}$. Assim $|A| = a, |B| = b$, $a, b \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$. Podemos arranjar os elementos de $A \times B$ na forma duma tabela

$$\begin{array}{cccc}
(1,1) & (1,2) & \ldots & (1,b) \\
(2,1) & (2,2) & \ldots & (2,b) \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
(a,1) & (a,2) & \ldots & (a,b).
\end{array}$$

Existem a filas, cada uma das quais tem b elementos. Logo vemos na tabela por axioma ii, $\underbrace{b + b + \ldots + b}_{a} = b \cdot a = a \cdot b$ elementos. Se A, B forem outros conjuntos quaisquer de a, b elementos podemos fazer o mesmo raciocínio substituindo os símbolos $1, \ldots, a; 1, \ldots, b$ em cima pelos elementos de A, B: isto dá uma bijecção natural, e acaba a demonstração para $k = 2$. Suponhamos o teorema agora já provado para qualquer produto cartesiano de $k - 1$ conjuntos finitos. Ponhamos $A := (A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_{k-1})$, e $B = A_k$. Por

$$A_1 \times \ldots \times A_k \ni (a_1, a_2, \ldots, a_{k-1}, a_k) \leftrightarrow ((a_1, a_2, \ldots, a_{k-1}), a_k) \in A \times B$$

estabelece-se evidentemente uma bijecção entre os elementos de $A_1 \times \ldots \times A_k$ e os elementos de $A \times B$. Logo por definição estes dois conjuntos tem a mesma cardinal, e, portanto,

$$\begin{aligned}
|A_1 \times \ldots \times A_k| &= |A \times B| && \text{def. 'ig. card.', ou 1.1} \\
&= |A||B| && \text{hip.ind.} \\
&= |A_1 \times \ldots \times A_{k-1}||A_k| && \text{def. } A, B \\
&= |A_1| \ldots |A_{k-1}||A_k|. && \text{hip. ind.}
\end{aligned}$$

Isto conclui a prova. □

Também nas provas seguintes vamos de forma coerente utilizar os conceitos de relação, aplicação etc., assim mostrando a útilidade destes conceitos. Sendo verdade que as técnicalidades tendem a ofuscar por vezes as ideias, exortamos que o leitor faça um esforço consciente para pôr as ideias essenciais por trás das provas a nú; tanto mais que estas, nesta secção, são sempre relativamente simples.

Problema 1.2. *Sejam M, N conjuntos finitos. Então tem-se para a família N^M das aplicações $f : M \to N$ que $|N^M| = |N|^{|M|}$.*

Prova. Pelos argumentos habituais podemos supôr sem perda de generalidade que $M = \{1, 2, \ldots, m\}$. Por

$$N^M \ni f \overset{\phi}{\mapsto} (f(1), \ldots, f(m)) \in \underbrace{N \times \ldots \times N}_{m}$$

definimos uma aplicação injectiva ϕ, pois para $f \neq f' \in N^M$ existe um $i \in M$ tal que $f(i) \neq f'(i)$, de modo que teremos $\phi(f) \neq \phi(f')$. Ora ϕ também é sobrejectiva, pois dado $(n_1, \ldots, n_m) \in N^m$ defina-se $f : M \to N$ pondo $f(i) = n_i$, para cada $i \in M$. Então $\phi(f) = (n_1, \ldots, n_m)$. Sendo assim ϕ bijecção obtemos pelo problema 1.1 o pretendido. $\square$

A prova atrás mostra que as aplicações $f : \{1, \ldots, m\} \to N$ são na essência os m-uplos de elementos de N.

Quantos subconjuntos tem um conjunto finito?

Problema 1.3. *Um conjunto finito Ω tem $2^{|\Omega|}$ subconjuntos.*

Prova. Para $A \subseteq \Omega$ definimos a função característica $\chi_A : \Omega \to \{0, 1\}$ por

$$\chi_A(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{se } \omega \in A, \\ 0 & \text{se } \omega \notin A. \end{cases}$$

Então a aplicação $2^\Omega \ni A \mapsto \chi_A \in \{0, 1\}^\Omega$ é facilmente vista como bijectiva. Pelo problema 1.2 obtemos $|2^\Omega| = |\{0, 1\}^\Omega| = |\{0, 1\}|^{|\Omega|} = 2^{|\Omega|}$ como tinhamos que provar. $\square$

A seguir determinamos os número das aplicações injectivas e bijectivas de um conjunto para outro, em termos das cardinalidades destes últimos. Para conjuntos finitos M, N utilizamos as notações

$$\mathrm{Inj}(M, N) := \{f : M \to N : f \text{ injectiva}\}, \mathrm{Bij}(M, N) := \{f : M \to N : f \text{ bijectiva}\} .$$

Define-se ainda $\mathrm{Sym}(M) := \mathrm{Bij}(M, M)$, conjunto chamado *grupo simétrico* de M. Mostra-se no capítulo sobre àlgebra que $\mathrm{Sym}(M)$ é de facto um grupo, chamado grupo das permutações sobre M. Se $M = \{1, 2, \ldots, m\}$, utiliza-se ainda a notação S_m, mas note-se que quaisquer dois grupos simétricos sobre conjuntos da mesma cardinalidade são isomórfos.

Problema 1.4. *Sejam* M, N *conjuntos finitos,* $m = |M|, n = |N|$.
a. Então a cardinalidade do conjunto $\mathrm{Inj}(M, N)$ *é*

$$|\mathrm{Inj}(M, N)| = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-m+1).$$

b. Este número é também a cardinalidade da família

$$D_{m,n} = \{(n_1, \ldots, n_m) : n_i \in N \text{ e } i \neq j \Rightarrow n_i \neq n_j\}$$

de todos os $m-$*uplos de elementos de* N *dois a dois distintos.*
c. O conjunto $\mathrm{Bij}(M, N)$ *é não vazio se e só se* $m = n$. *Neste caso* $\mathrm{Bij}(M, N) = \mathrm{Inj}(M, N)$ *e a cardinalidade destes conjuntos é* $m!$.
d. Em particular o grupo simétrico Sym(M) *tem* $m!$ *elementos.*

Prova. a. Aconselha-se, o leitor dê um argumento intuitivo como na primeira prova do problema 1.1. Uma prova mais bem fundamentada é a seguinte: podemos supôr $|M| = \{1, \ldots, m\}$. Se $m = 1$ a afirmação é que $|\mathrm{Inj}(\{1\}, N)| = n$. É evidente que é válida. Agora suponhamos a afirmação já provada para o conjunto $M' = \{1, \ldots, m-1\}$ em lugar de M. Seja

$$\mathcal{P} = \text{família dos pares } (\iota, \ell) \in \mathrm{Inj}(M', N) \times \{1, \ldots, n\} \text{ com } \ell \notin \iota(M').$$

Para $f \in \mathrm{Inj}(M, N)$, temos que $f|\{1, \ldots, m-1\} \in \mathrm{Inj}(M', M)$. Logo inferimos uma aplicação ϕ

$$\mathrm{Inj}(M, N) \ni f \overset{\phi}{\mapsto} (f|\{1, \ldots, m-1\}, f(m)) \in \mathcal{P}.$$

É fácil de ver que ϕ é bijectiva. Logo $|\mathrm{Inj}(M, N)| = |\mathcal{P}|$.

Como para dado ι injectivo, temos $|\iota(M')| = |M'| = m-1$, então existem $|N \setminus \iota(M')| = n-m+1$ pares $(\iota, \ell) \in \mathcal{P}$. Consequentemente, $|\mathcal{P}| = |\mathrm{Inj}(M', N)| \cdot (n-m+1)$. Daí com a hipótese de indução, $|\mathrm{Inj}(M, N)| = |\mathrm{Inj}(M', N)| \cdot (n-m+1) = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-(m-1)+1) \cdot (n-m+1)$.

b. Decorre imediatemente do facto que a aplicação ϕ utilizada na prova do problema 1.2, quando restrita a $\mathrm{Inj}(M, N)$, dá uma correspondência biunivoca entre $\mathrm{Inj}(M, N)$ e $D_{m,n}$; isto é, tem-se com ese, e somente se, ϕ que

$$\mathrm{Inj}(M, N) \ni \iota \overset{\phi}{\mapsto} (\iota(1), \ldots, \iota(m)) \in D_{m,n}$$

é aplicação bijectiva. c. A primeira parte de c decorre da própria definição da cardinal de um conjunto. Supondo agora $m = n$, obtemos de a, que $|\mathrm{Inj}(M, N)| = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-n+1) = n!$. Ora como para cada $\iota \in \mathrm{Inj}(M, N)$ nos temos $|\iota(M)| = |M| = m = n$, cada tal ι é sobrejectivo. Logo $\mathrm{Inj}(M, N) \subseteq \mathrm{Bij}(M, N)$. Como a inclusão recíproca é trivial, obtemos c. d. É uma consequência imediata de c. □

Até agora estabelecemos relações entre cardinalidades por meio de bijecções. Isto é um caso (muito) especial do princípio da contagem dupla. Grafos bipartitos (X, E, Y) foram mostrados na secção 0.2. O *grau* do nó $u \in X \cup Y$, $\mathrm{grau}(u)$, dum tal grafo é o número das arrestas nele incidente.

Teorema (Princípio da contagem dupla). *Seja (X, E, Y) um grafo bipartito (ou, equivalente, uma relação binária).*
a. Então tem-se

$$\sum_{x \in X} \mathrm{grau}(x) = |E| = \sum_{y \in Y} \mathrm{grau}(y)\,.$$

b. Se a relação binária provier de uma aplicação $f : X \to Y$, então

$$|X| = \sum_{y \in Y} \mathrm{grau}(y)\,.$$

c. Em particular, se $f : X \to Y$ for aplicação k-para-1 e sobrejectiva, então $|X| = k|Y|$.

Prova. a. Para $x \in X$ seja $E_x = \{(x, y) : \text{existe um } y \in Y \text{ tal que} (x, y) \in E\}$. Como o grafo em causa é bipartito, temos $E = \bigcup_{x \in X} E_x$. Aqui unem se conjuntos E_x, disjuntos dois a dois. Logo $|E| = \sum_{x \in X} |E_x|$. Pela própria definição do grau' de um nó, temos $\mathrm{grau}(x) = |E_x|$. Daí decorre a igualdade à esquerda; a igualdade à direita prova-se de forma análoga. b. Se o grafo originar de uma aplicação, então tem-se $\mathrm{grau}(x) = 1$ para todos os $x \in X$, donde decorre o resultado. c. Por definição duma função k-para-1 sobrejaectiva, temos $|f^{-1}(y)| = k$ para todos os $y \in Y$. Como $\mathrm{grau}(y) = |f^{-1}(y)|$, o resultado decorre da parte b. □

Exemplo . A figura mostra um grafo bipartito com $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}, Y = \{a, b, c, d\}$. A conservação da soma dos graus é nela ilustrada pela igualdade $1+1+2+1+0 = 3+0+1+1$.

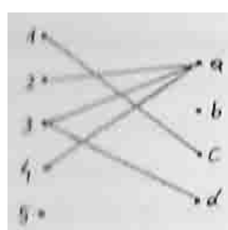

Figura 1. Grafo Bipartido

Problema 1.5. *As seguintes famílias de objectos combinatórios têm a mesma cardinalidade*

$$\binom{n}{m} := \frac{n \cdot (n-1) \cdot \ldots (n-m+1)}{m!}.$$

a. A família

$$C_{m,n} = \{(n_1, \ldots, n_m) : n_i \text{ inteiro e } 1 \leq n_1 < n_2 < \ldots < n_m \leq n\}$$

dos m-uplos (estritamente) crescentes com entradas em $\{1, 2, \ldots, n\}$.
b. A família dos subconjuntos de cardinalidade m de $\{1, \ldots, n\}$.
c. A família dos subconjuntos de cardinalidade $n - m$ de $\{1, \ldots, n\}$.

Prova. a. É fácil de ver que a aplicação $\phi : D_{m,n} \to C_{m,n}$ que leva um m-uplo em $D_{m,n}$ para a sua reordenação crescente (em $C_{m,n}$) é uma aplicação $m!$-para-1 : com efeito, dado $(n_1,\dots,n_m) \in C_{m,n}$ tem-se $\phi^{-1}(n_1,\dots,n_m) = \{(n_{\pi}(1),\dots,n_{\pi}(m)) : \pi \in S_m\}$. A afirmação decorre da alínea (d) do princípio da contagem dupla, pois $|S_m| = m!\,0$. Da alínea (b) obtemos a afirmação que $|D_{m,n}| = m!|C_{m,n}|$. O problema 1.4.(b) dá o pretendido. b. Aproveitando que um conjunto não muda se permutarmos nele os elementos, obtemos que cada subconjunto de cardinalidade m de $\{1,\dots,n\}$ corresponde a exactamente uma sucessão em $C_{m,n}$. c. A aplicação $M \mapsto M^c$ (^{c} significando o complemento em $\{1,\dots,n\}$) define evidentemente uma bijecção (com efeito uma involução) entre os conjuntos de cardinalidade m e de cardinalidade $n-m$ de $\{1,2,\dots,n\}$. Portanto as cardinalidades das famílias destes conjuntos são iguais. □

Notemos que o problema 1.5 nos dá $\binom{n}{m} = \binom{n}{n-m}$.

Dos problemas 1.5.(b) e 1.3 decorre a seguinte famosa identidade já não trivial.

Problema 1.6. *Para qualquer inteiro $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ tem-se*

$$\sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} = 2^n\,.$$

Prova. Seja $\mathcal{P}_m(\{1,\dots,n\})$:=família dos subconjuntos de cardinalidade m de $\{1,2,\dots,n\}$. Então

$$\begin{aligned}
\sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} &= \sum_{m=0}^{n} |\mathcal{P}_m(\{1,\dots,n\})| && \text{problema 1.5.(b)}\\
&= |\biguplus_{m=0}^{n} \mathcal{P}_m(\{1,\dots,n\})|\\
&= |\mathcal{P}(\{1,\dots,n\})|\\
&= 2^n. && \text{problema 1.3}
\end{aligned}$$

□

Por um *multiconjunto* entende se 'um conjunto em que elementos se podem repetir': por exemplo $\{a,a,b,c,c\}$. Se, como vimos na prova do problema 1.3, subconjuntos dum universo Ω são identificáveis com aplicações características $\chi : \Omega \to \{0,1\}$; multisubconjuntos de Ω são-o, mais geral, com aplicações $f : \Omega \to \mathbb{Z}_{\geq 0}$, onde o valor $f(\omega)$ indica o número das vezes que ω ocorre na lista. A $\{a,a,b,c,c\} \subseteq \Omega$, por exemplo, corresponde a aplicação com $f(a) = f(c) = 2$, $f(b) = 1$ e $f(\omega) = 0$ para todos os outros $\omega \in \Omega$.

Problema 1.7. *As famílias seguintes de objectos combinatórios têm todas a mesma cardinalidade*

$$\binom{m+n-1}{m}.$$

a. $\{(a_1,\dots,a_n) \in \mathbb{Z}^n_{\geq 0} : a_1 + \dots + a_n = m\}$.
b. $\{(b_1,\dots,b_{n-1}) \in \mathbb{Z}^n_{\geq 0} : 0 \leq b_1 \leq \dots \leq b_{n-1} \leq m\}$.

c. A família dos multisubconjuntos de cardinalidade $n-1$ de um conjunto de cardinalidade $m+1$.
d. A família dos monómios de grau m em n variáveis.

Prova. Vamos chamar aos conjuntos referidos na alíneas a,b, respectivamente, simplesmente A, B. Um momento de reflexão revela que nos temos uma aplicação

$$B \ni (b_1, \ldots, b_{n-1}) \mapsto (b_1+1, b_2+2, \ldots, b_{n-1}+(n-1)) \in C_{n-1,m+n-1}$$

que é bijectiva. Logo o problema 1.5 dá-nos que B tem a cardinalidade afirmada. Mas também existe uma bijecção entre os conjuntos A e B; a saber

$$A \ni (a_1, \ldots, a_n) \mapsto (a_1, a_1+a_2, \ldots, a_1+\ldots+a_{n-1}) \in B\,.$$

(indique porque; qual a inversa desta aplicação?). Assim o conjunto $|A|$ tem o valor afirmado. c. Que a referida famí lia tem a dita cardinalidade decorre do facto que um qualquer multisubconjunto de $\{0,1,\ldots,m\}$ de cardinalidade $n-1$ está por ordenação dos seus elementos (de forma análoga à usada na prova do problema 1.5) em correspondência com um elemento da família B. d. Finalmente, como um monómio de grau m em $x_1, \ldots, x_n$, é uma expressão do tipo $x_1^{a_1}x_2^{a_2}\ldots x_n^{a_n}$ com $a_1, \ldots, a_n \geq 0$, e $a_1+\ldots+a_n = m$, é claro que esta família tem a cardinalidade do conjunto referido em (a). □

Uma *partição ordenada* do tipo $(k_1, \ldots, k_n)$ do conjunto K é um n-uplo $(K_1, \ldots, K_n)$ de subconjuntos dois a dois disjuntos e união K tal que $|K_i| = k_i$, para $i = 1, \ldots, n$.

Problema 1.8. *Sejam $(K_1, \ldots, K_n)$ partição ordenada de K, e $(K'_1, \ldots, K'_n)$ partição ordenada de K'; ambas do tipo $(k_1, \ldots, k_n)$. Então existem*
$k_1!k_2!\ldots k_n!$ aplicações bijectivas $f : K \to K'$ com $f(K_i) = K'_i$.

Prova. Seja $\mathcal{S}$ a família das permutações $\pi \in \mathrm{Sym}(K)$ que deixam todos os blocos K_i invariantes (i.e. as permutações π que satisfazem $\pi(K_i) = K_i$). Então a aplicação

$$\mathcal{S} \ni \pi \mapsto (\pi|K_1, \ldots, \pi|K_n) \in \mathrm{Sym}(K_1) \times \ldots \times \mathrm{Sym}(K_n)$$

é facilmente vista como bijectiva (qual a sua inversa?). Logo obtemos dos problemas 1.1 e 1.4.(d), que $|\mathcal{S}| = |\mathrm{Sym}(K_1)| \cdot \ldots \cdot |\mathrm{Sym}(K_n)| = k_1! \ldots k_n!$. Sejam agora $f_1, f_2 : K \to K'$ duas aplicações bijectivas com $f_1(K_i) = K'_i$, $f_2(K_i) = K'_i$, para $i = 1, \ldots, n$. Então $\pi := f_1^{-1} \circ f_2$ é aplicação bijectiva com a propriedade $\pi(K_i) = K_i$ para $i = 1, \ldots, n$. Logo $\pi \in \mathcal{S}$ e $f_2 = f_1 \circ \pi$. Como f_1, f_2 foram arbitrariamente escolhidas, isto mostra: qualquer bijecção do tipo referido no enunciado obtem-se escolhendo uma tal bijecção fixa f (por exemplo f_1) e compondo-a com todos os possíveis $\pi \in \mathcal{S}$. O conjunto de bijecções é portanto $\mathcal{B} = \{f \circ \pi : \pi \in \mathcal{S}\}$. Como a aplicação $\mathcal{S} \ni \pi \mapsto f \circ \pi \in \mathcal{B}$ é facilmente vista como bijectiva, obtemos o pretendido resultado. □

Problema 1.9. *a. Seja $k = k_1 + \ldots + k_m$, $k_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Então existem*

$$\frac{k!}{k_1!k_2!\ldots k_m!}$$

partições ordenadas do tipo $(k_1, \ldots, k_m)$ *de* $\{1, \ldots, k\}$.
b. Este é também o número das aplicações $f : \{1, \ldots, k\} \to \{1, \ldots, m\}$ *com* $|f^{-1}(i)| = k_i$, *para* $i = 1, \ldots, m$.

Prova. Definamos uma partição 'standard' $(S_1, \ldots, S_m)$ do tipo $(k_1, \ldots, k_m)$ do conjunto $\{1, 2, \ldots, k\}$, pelos conjuntos

$$S_i = \{1 + \sum_{l=1}^{i-1} k_l, 2 + \sum_{l=1}^{i-1} k_l, \ldots, \sum_{l=1}^{i} k_l\}.$$

Repartindo o conjunto $\mathrm{Sym}(\{1, \ldots, k\})$ segundo os blocos levados para S_i temos

$$\mathrm{Sym}(\{1, \ldots, k\}) = \biguplus_{\substack{(K_1, \ldots, K_m) \\ \text{do tipo } (k_1, \ldots, k_m)}} \{\pi : \pi(K_i) = S_i\}.$$

Tomando cardinalidades e usando o problema 1.4.(d) obtemos

$$\begin{aligned} k! &= \sum_{\substack{(K_1, \ldots, K_m) \\ \text{do tipo } (k_1, \ldots, k_m)}} |\{\pi : \pi(K_i) = S_i\}| \\ &\overset{1.1.9}{=} \sum_{\substack{(K_1, \ldots, K_m) \\ \text{do tipo } (k_1, \ldots, k_m)}} k_1! k_2! \ldots k_m! \\ &= k_1! k_2! \ldots k_m! \cdot |\{\text{parti. ord. tipo } (k_1, \ldots, k_m)\}|. \end{aligned}$$

Disto decorre a afirmação. □

Problema 1.10. *a. (Lei da distributividade geral) Sejam* a_{ij}, $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n_i$, *elementos de um anel comutativo. Então tem-se*

$$\prod_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n_i} a_{ij} = \sum_{\substack{1 \le j_1 \le n_1 \\ \vdots \\ 1 \le j_m \le n_m}} a_{1j_1} a_{2j_2} \ldots a_{mj_m}.$$

b. Em particular tem-se para elementos x_j *dum tal anel o teorema multinomial*

$$(x_1 + \ldots + x_n)^m = \sum_{\substack{m_1, \ldots, m_n \ge 0 \\ m_1 + \ldots + m_n = m}} \frac{m!}{m_1! \ldots m_n!} x_1^{m_1} \ldots x_n^{m_n}.$$

Prova. a. Para $m = 1$ a afirmação degenera para a seguinte evidentemente válida:

$$a_{11} + \ldots + a_{1n_1} = \sum_{1 \le j_1 \le n_1} a_{1j_1}.$$

Suponhamos a afirmação provada para todos os $m' < m$ em lugar do m. Então temos

$$\begin{aligned}
\prod_{i=1}^{m}(a_{i1}+\ldots+a_{in_i}) &= \prod_{i=1}^{m-1}(a_{i1}+\ldots+a_{in_i})(a_{m1}+\ldots+a_{mn_m}) \\
&\overset{1}{=} \Big(\sum_{\substack{1\le j_1\le n_1\\ \vdots \\ 1\le j_{m-1}\le n_{m-1}}} a_{1j_1}a_{2j_2}\ldots a_{m-1,j_{m-1}}\Big)(a_{m1}+\ldots+a_{mn_m}) \\
&\overset{2}{=} \sum_{j=1}^{n_m}\Big(\sum_{\substack{1\le j_1\le n_1\\ \vdots \\ 1\le j_{m-1}\le n_{m-1}}} a_{1j_1}a_{2j_2}\ldots a_{m-1,j_{m-1}}\Big)a_{mj} \\
&\overset{3}{=} \text{soma afirmada}
\end{aligned}$$

Aqui utilizámos em '$\overset{1}{=}$' a hipótese da indução, em '$\overset{2}{=}$' a distributividade simples, e em '$\overset{3}{=}$' o modo de uso do somatório.

b. Ponhamos na lei da distributividade generalizada $n_1 = n_2 = \ldots = n_m = n$ e, independente dos i, também $a_{ij} = x_j$. Então obtemos

$$\begin{aligned}
(x_1+\ldots+x_n)^m &= \prod_{i=1}^{m}(x_1+\ldots+x_n) \\
&= \sum_{\substack{1\le j_1\le n\\ \vdots \\ 1\le j_m\le n}} x_{j_1}x_{j_2}\ldots x_{j_m} \\
&= \sum_{f:\{1,\ldots,m\}\to\{1,\ldots,n\}} x_{f(1)}x_{f(2)}\ldots x_{f(m)} \\
&= \sum c_{m_1,\ldots,m_n} x_1^{m_1}x_2^{m_2}\ldots x_n^{m_n},
\end{aligned}$$

onde

$$c_{m_1,\ldots,m_n} = \text{número das aplicações } f:\{1,\ldots,m\}\to\{1,\ldots,n\} \text{ com } |f^{-1}(j)| = m_j\,.$$

Daí a afirmação decorre do problema 1.9. □

Seja $m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Então definem-se os *coeficientes multinomiais* por

$$\binom{m}{m_1,\ldots,m_n} = \begin{cases} \frac{m!}{m_1!\cdot\ldots\cdot m_n!} & \text{se } m_1,\ldots,m_n \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \text{ e } m_1+\ldots+m_n = m \\ 0 & \text{nos outros casos} \end{cases}$$

Os coeficientes multinomiais são uma generalização dos coeficientes binomiais: $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} = \binom{n}{k,n-k}$.

Uma *partição não ordenada* de um conjunto $\{1,\ldots,n\}$ em k blocos é uma família $\{B_1,\ldots,B_k\}$ de subconjuntos B_i de $\{1,\ldots,n\}$ tal que

$$\text{i. } B_i \neq \emptyset, \quad \text{ii. } B_i \cap B_j = \emptyset \text{ para } i \neq j, \quad \text{iii. } \bigcup_i B_i = \{1,\ldots,n\}$$

O número $S(n,k)$ =número de partições não ordenadas de $\{1,\ldots,n\}$ em k blocos. diz-se *número de Stirling* de 2^a ordem.

Problema 1.11. *Os números $S(n,k)$ satisfazem a recorrencia seguinte:*

$$S(n,k) = S(n-1,k-1) + kS(n-1,k)\,.$$

Prova. Sejam $\mathcal{S}(n,k), \mathcal{S}(n-1,k-1)$, e $\mathcal{S}(n-1,k)$ as famílias de partições subjacentes com as cardinalidades mencionadas.

Submeta-se uma partição $\{B_1,\ldots,B_k\} \in \mathcal{S}(n,k)$ ao processo seguinte:
· afaste-se n do (único) bloco B_i em que está;
· se este B_i foi transformado em $\{\}$ apague-se o.

Este processo define evidentemente uma aplicação natural

$$\mathcal{S}(n,k) \xrightarrow{\phi} \mathcal{S}(n-1,k-1) \cup \mathcal{S}(n-1,k)\,.$$

(Para o caso $n=5, k=3$, temos, por exemplo, $\{\{1,2\},\{3,4\},\{5\}\} \overset{\phi}{\mapsto} \{\{1,2\},\{3,4\}\}$, mas $\{\{1,2\},\{3,5\},\{4\}\} \overset{\phi}{\mapsto} \{1,2\},\{3\},\{4\}\}$.)

Pensemos no grafo desta aplicação no sentido da contagem dupla. Um nó em
$\{B'_1,\ldots,B'_{k-1}\} \in \mathcal{S}(n-1,k-1)$
tem grau 1, pois a imagem inversa deste nó é $\{B'_1,\ldots,B'_{k-1},\{n\}\}$. Tal um nó tem portanto grau 1. Por outro lado o nó $\{B'_1,\ldots,B'_{k-1},B'_k\} \in \mathcal{S}(n-1,k)$ é 'acertado' exactamente quando ϕ é aplicado a uma das k partições $\{B'_1,\ldots,B'_i\cup\{n\},\ldots,B'_k\}$, $i=1,\ldots,n$. Tal um nó tem portanto grau k. Segundo o principio da contagem dupla obtemos o pretendido. □

Agora podemos determinar o número das funções sobrejectivas de um conjunto finito para outro.

Problema 1.12. *Dados $m \geq n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, tem-se*

$$|Sobj(\{1,\ldots,m\},\{1,\ldots,n\})| = n!\mathcal{S}(m,n)\,.$$

Prova. Uma aplicação $f : \{1,\ldots,m\} \to \{1,\ldots,n\}$ é sobrejectiva se, e somente se, $|f^{-1}(i)| \geq 1$ para $i=1,\ldots,n$. Portanto cada tal aplicação define uma partição em n blocos não vazios de $\{1,\ldots,m\}$. Seja $\pi \in S_n$ permutação qualquer. Então

$$\begin{aligned}\{f^{-1}(1),\ldots,f^{-1}(n)\} &= \{f^{-1}(\pi^{-1}(1)),\ldots,f^{-1}(\pi^{-1}(n))\}\\ &= \{(\pi\circ f)^{-1}(1),\ldots,(\pi\circ f)^{-1}(n)\}.\end{aligned}$$

Assim as $n!$ aplicações $\pi\circ f$ associadas a f por escolhas diferentes de $\pi \in S_n$ definem a mesma partição. Logo a aplicação

$$\mathrm{Sobj}(\{1,\ldots,m\},\{1,\ldots,n\}) \ni f \mapsto \{f^{-1}(1),\ldots,f^{-1}(n)\} \in \mathcal{S}(m,n)$$

é uma aplicação $n!$-para-1 sobrejectiva. A partir do princípio da contagem dupla temos o que queríamos provar. □

Uma *partição de um inteiro* k é um m-uplo $k_1 \geq k_2 \geq \ldots \geq k_m \geq 1$ com $k_1 + \ldots + k_m = k$ Costuma escrever-se $(k_1, k_2, \ldots, k_m) \vdash k$. Aqui, m é o número das *partes* da partição. Utilizando a notação $\mathbf{1}_t = (1, 1, \ldots, 1)$ (com t uns '1'), de modo que $3\mathbf{1}_4 = (3, 3, 3, 3)$, etc., podemos indicar repetições de forma conveniente. Por exemplo temos $(4, 4, 2, 2, 2, 1) = (4\mathbf{1}_2, 2\mathbf{1}_3, 1) \vdash 15$; Numa notação $(k_1\mathbf{1}_{l_1}, \ldots, k_s\mathbf{1}_{l_s})$ podemos supôr que os k_i são estritamente decrescentes: $k_1 > k_2 > \ldots > k_s$. Diz-se de uma partição não-ordenada $\{B_1, \ldots, B_n\}$ de um conjunto que ela é do tipo $(k_1\mathbf{1}_{l_1}, \ldots, k_s\mathbf{1}_{l_s})$, se $k_1 > \ldots > k_s > 0$ e se ela tiver l_i blocos de tamanho k_i para $i = 1, \ldots, s$. Por exemplo, $\{\{1, 3, 17\}, \{2\}, \{9, 13, 14\}, \{4, 11, 15, 16\}, \{5, 6, 8\}, \{7, 12\}, \{10\}\}$, é partição não ordenada do tipo $(4, 3\mathbf{1}_3, 2, \mathbf{1}_2)$ de $\{1, \ldots, 17\}$.

Problema 1.13. *Seja* $\mathbf{k} = (k_1\mathbf{1}_{l_1}, \ldots, k_s\mathbf{1}_{l_s}) \vdash k$ *com* $k_1 > \ldots > k_s$. *Então o número das partições não-ordenadas do tipo* $\mathbf{k}$ *do conjunto* $\{1, \ldots, k\}$ *é*

$$\frac{k!}{l_1!k_1!^{l_1} \cdot l_2!k_2!^{l_2} \cdot \ldots \cdot l_s!k_s!^{l_s}}.$$

Prova. Sejam $\mathcal{O}, \mathcal{N}$ respectivamente as partições ordenadas e não-ordenadas do tipo $\mathbf{k}$. Então cada uma das partições em $\mathcal{O}$ e $\mathcal{N}$ tem $n = l_1 + l_2 + \ldots + l_s$ blocos. Examinemos a aplicação $\phi : \mathcal{O} \to \mathcal{N}$ definida por

$$\mathcal{O} \ni (B_1, \ldots, B_n) \stackrel{\phi}{\mapsto} \{B_1, \ldots, B_n\} \in \mathcal{N}.$$

Seja $(L_1, L_2, \ldots, L_s)$ a partição standard do conjunto $\{1, \ldots, n\}$, definida por $L_1 = \{1, \ldots, l_1\}, L_2 = \{l_1 + 1, \ldots, l_1 + l_2\}$, etc. Do problema 1.8, o conjunto $\mathcal{B} = \{f \in \mathrm{Sym}(\{1, \ldots, n\}) : f(L_i) = L_i, i = 1, \ldots, s\}$ tem cardinalidade $|\mathcal{B}| = l_1!l_2! \ldots l_s!$. Ora, as partições $(B_{f(1)}, \ldots, B_{f(n)})$, $f \in \mathcal{B}$, estão todas em $\mathcal{O}$ (porque?) mas são todas diferentes, e portanto, em número, $l_1!l_2! \ldots l_s!$; enquanto as associadas partições não-ordenadas $\{B_{f(1)}, \ldots, B_{f(n)}\}$ são todas iguais por concfund1c-2. Se uma partição $(B'_1, \ldots, B'_n) \in \mathcal{O}$ for diferente a todos os $(B_{f(1)}, \ldots, B_{f(n)})$, $f \in \mathcal{B}$, então um dos blocos B'_i difere de todos os blocos em $\{B_1, \ldots, B_n\}$ (em particular dos do mesmo tamanho), logo $\phi(B_1, \ldots, B_n) \neq \phi(B'_1, \ldots, B'_n)$. Isto mostra que ϕ é aplicação $l_1!l_2! \ldots l_s!$-para-1. Do principio da contagem dupla obtemos $\mathcal{N} = |\mathcal{O}|/l_1!l_2! \ldots l_s!$, enquanto que o problema 1.9 nos dá $|\mathcal{O}| = k!/k_1!^{l_1} \cdots k_s!^{l_s}$. Daí obtemos a afirmação. □

2. Discussão e Conclusão

Nesta secção familiarizámos o leitor com algumas das mais fundamentais definições, conceitos, ideias, e factos da análise combinatória enumerativa. Determinámos cardinalidades de conjuntos de objectos mais básicos em combinatória: produtos cartesianos no problema 1.1, aplicações de um conjunto para outro: sem restrições nos problemas 1.2, injectivas e bijectivas em 1.4, sobrejectivas no problema 1.12; as cardinalidades da família de subconjuntos de um dado conjunto Ω foi determinada no problema 1.3, com restrição à dada cardinalidade de subconjuntos no problema 1.5. Determinámos também o número das soluções de equações diofantinas lineares não negativas no problema 1.7 e os números de partições ordenadas de determinado tipo no problema 1.8 e não ordenadas no problema 1.11. Importantes identidades para coeficientes binomiais e multinomiais são dadas nos problemas 1.6 e 1.10. Muitas das demonstrações foram feitas partindo do axioma da p.analcomb1 e aplicando uns poucos princípios de forma coerente: indução, exibição de bijecções explícitas, e o princípio da contagem dupla.

Ao longo do caminho pudemos ver que certos objectos são essencialmente iguais (para fins combinatórios pelo menos): certas sucessões finitas são aplicações ou palavras (ver em baixo) ou intimamente ligadas a multiconjuntos, ver problemas 1.5 ou 1.7. Importante foi também ver uma aplicação não apenas 'para a frente' mas também como caso especial duma relação e considerar a sua inversa f^{-1} sempre de novo uma relação, mas aplicação só se for bijectiva.

A análise combinatória enumerativa não para aqui; *muito* longe disso, como veremos (sobretudo também nos exercícios), mas é penoso avançar sem ter presente os poucos mas importantes resultados básicos atrás apresentados.

Antes de concluirmos esta secção 1.1 queremos ainda reflectir sobre uma eventual crítica à nossa abordagem. Pode aparecer como 'demasiado pesada'. Já dissemos alguma coisa sobre isto aquando das duas provas do problema 1.1, páginas analcomb2,3. Consideremos para a discussão o problema seguinte.

Problema 2.1. *Quantas palavras sem 4 s consecutivos podemos formar das letras de mississippi?*

A seguir vamos dar três soluções para este problema e discutir as suas respectivas vantagens e desvantagens.

Solução 1. Seja P o conjunto de *todas* as palavras que podemos formar das letras existentes, por exemplo *mississippi*, *sissspipimi*, *ispssimpisi*, *mssssiipiip*, etc. Cada tal palavra permite permutar os 4 s entre si, os 4 i entre si e os 2 p, i.é. permite 2!4!4! permutações de letras sem ser mudada. Como existem 11! permutações ao todo, obtemos $2!4!4! \times |P| = 11!$, donde se calcula $|P| = 34650$. Ora as palavras do tipo $*...*\,ssss*...*$ não são admitidas. Existem 7! permutações das letras nos lugares dos $*$. Um argumento semelhante ao anterior dá para cada um destes 8 tipos $7!/2!4! = 105$ palavras. Logo obtemos o número procurado de palavras é $34650 - 8 \cdot 105 = 33810$. □

Esta solução representa o arquetipo duma solução 'classica' ao problema. Em linguagem pouco técnica encontrámos o número correcto. A linguagem é *ad hoc*, i.é. introduzida para o objectivo imediato em vista. O leitor deve acreditar (ou 'ver' com os seus 'olhos mentais') que as coisas são como afirmadas; do mesmo modo o autor espera do leitor que este associe aquando da leitura os conceitos que ele teve em mente. Admitidamente neste simples problema não é improvável que autor e leitor ficam 'em fase' .

Vejamos agora duas soluções mais 'pesadas'. Eles assentam em teoremas que provámos no texto onde introduzímos também definições exactas e (mais) universalmente aceites. Assim o problema é inserido numa teoria - visto como um dos (muitos) casos em que coeficientes multinomiais desempenham um papel. O leitor precisa de menos 'intuição' (não se trabalha com coisas algo vagas como 'palavras do tipo $*...*ssss*...*$', etc.) de modo que, deste que o leitor siga com atenção, o perigo de interpretação errada é diminuida. Também diminuida é a probabilidade de erro por se ter gerado confusão nos conceitos. Tal perigo (no actual problema simples reduzido) aumenta substancialmente sobretudo em problemas mais complicados. Se se utilizar linguagem demasiado 'simples' ou 'ingénua' corre-se o risco de não distinguir devidamente entre conceitos afins mas distintos; em geral a não-referência a teoremas bem estabelecidos aumenta a probabilidade de 'lapsos' ocasionais no raciocínio.

Solução 2. As palavras que podemos formar das 11 letras de *mississippi* estão em correspondência com as partições ordenadas (K_m, K_p, K_i, K_s) do tipo $(1, 2, 4, 4)$ do conjunto $\Omega = \{1, \dots 11\}$. Aqui K_p é o conjunto das posições onde nos encontramos p, etc. Do problema 1.9 existem $\frac{11!}{1!2!4!4!} = 34650$ tais partições. As palavras proibidas estão em correspondência com as partições em que para um dos $i = 1, \dots 8$, se tem $K_s = \{i, i+1, i+2, i+3\}$. Escolhido K_s existem $\frac{7!}{1!2!4!} = 105$ escolhas para (K_m, K_p, K_i). Logo existem $8 \cdot 105 = 840$ palavras proibidas e portanto 34650-840=33810 palavras admitidas. $\square$

Solução 3. As palavras que podemos formar das 11 letras de *mississippi* 'são' as aplicações $f : \{1, \dots, 11\} \to \{i, m, p, s\}$ com a propriedade $|f^{-1}(i)| = 4, |f^{-1}(m)| = 1, |f^{-1}(p)| = 2, |f^{-1}(s)| = 4$. Logo existem pelo problema 1.9 $\frac{11!}{4!1!2!4!} = 34650$ tais palavras. Ora destas estão proibidas as aplicações que levam um dos 8 subconjuntos $K_i = \{i, i+1, i+2, i+3\}$ $(i = 1, \dots 8)$ de quatro números consecutivos para s, isto é, os f com $f^{-1}(s) = K_i$ para um i. Estes são exactamente os f cuja imagem inversa define uma partição do tipo $(1, 2, 4)$ sobre um dos conjuntos $\Omega \setminus K_i$ (que todos têm 7 elementos). Logo $8 \cdot \frac{7!}{4!1!2!} = 840$ das aplicações originais devem ser descartadas e 34650-840=33810 é o número das palavras admitidas. $\square$

Nem tudo é bem com estas últimas duas soluções contudo. Por trás da gíria algo técnica perde-se facilmente o fio condutor: a 'ideia essencial'.

A favor da nossa abordagem reconhecidamente um pouco pesada, podemos, no mínimo, aduzir que os resultados são coerentemente expostos; sem saltos e raciocínios vago. Em abordagens tradicionais do teorema multinomial, por exemplo, o leitor não vai encontrar problema 1.10.(a), ficando assim privado do importante "insight" que o primeiro é consequência da última, que também noutras circunstâncias (como veremos) é útil. Mais, estamos a utilizar sem excepções conceitos que todo o matemático precisa no seu dia a dia, também em campos completamente diferentes, mostrando assim a flexibilidade dos mesmos e ensinando como escrever demonstrações compreensíveis utilizando-os.

Em suma aconselhamos: tentar resolver em primeiro lugar um problema pelo próprio esforço. Se tal parece custar demasiado tempo, procurar na literatura a solução de problemas semelhantes. Re-tentar ... re-ler ... até encontrar uma ideia. Na exposição final progredir segundo gosto, 'maturidade' e conhecimentos, duma linguagem ad hoc para uma que utilize conceitos/ideias/métodos mais universalmente aceites. Mas: como tal pode custar bastante tempo, não aconselhamos exagero no ambito deste projecto; não é preciso que escrevam já provas como as atrás (que custaram muitas horas por página).

3. Princípio da inclusão-exclusão

Na p.analcomb1c6 introduzímos um postulado que em junção com o facto que dois conjuntos têm a mesma cardinalidade se, e somente se, existir uma bijecção entre eles (p.analcomb1c-1) serviu bem para determinar as cardinalidades de certos conjuntos de construção elementar. Demais avanços podem ser obtidos por uma vasta generalização do postulado.

Primeiro um exercício que se faz segundo os padrões ensinados na p.concfund3c7.

Exercício 3.1. Sejam A, B subconjuntos não necessariamente disjuntos dum universo Ω. Então tem-se as seguintes decomposições:

$$A \cup B = A \uplus (B \setminus (A \cap B)); \quad \text{e} \quad B = (A \cap B) \uplus (B \setminus (A \cap B) .$$

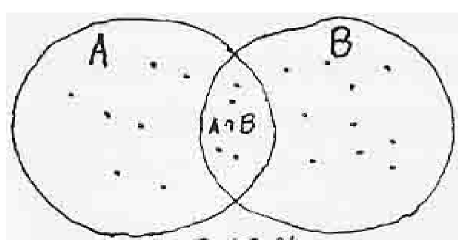

Figura 2. Princípio da Inclusão-Exclusão

Utilizando este resultado obtemos então pelo postulado,

$$\begin{aligned} |B| &= |A \cap B| + |B \setminus (A \cap B)|, \\ \text{logo} \quad |A \cup B| &= |A| + |B \setminus (A \cap B)| \\ &= |A| + |B| - |A \cap B|. \end{aligned}$$

Este facto também ainda pode obter-se intuitivamente, examinando a figura 2. Como $|A| + |B|$ 'conta' $A \cap B$ uma vez em $|A|$ e uma vez em $|B|$, temos que subtrair $|A \cap B|$ para obter $|A \cup B|$. No entanto, o seguinte princípio da inclusão-exclusão já excede o que se pode fazer sem formalismo.

Teorema (Princípio de inclusão-exclusão). *Sejam $A_1, \dots, A_k$ subconjuntos de um universo Ω finito. Então tem-se para a cardinalidade da união destes conjuntos a fórmula seguinte:*

$$|\bigcup_{i=1}^{k} A_i| = \sum_{i=1}^{k} (-1)^{i-1} \Big(\sum_{\substack{I \subseteq \{1,\dots,k\}, \\ |I|=i}} |\bigcap_{i\in I} A_i| \Big), .$$

Antes de fazermos uma demonstração formal, aproveitamos para explicar como 'descodificar' tal monstro de fórmula; de resto ter-se-á até o fim da demonstração uma excelente oportunidade de ver como se trabalha com somatórios e outras simbologías de 'indexações' complicadas; vejam-se também as notas finais desta secção.

A fórmula deixa de nos assustar, se a examinarmos primeiro para casos especiais. Escolhemos o parametro k pequeno. Para $k = 2$, por exemplo, à esquerda dá a expressão $|A_1 \cup A_2|$; à direita, a soma exterior degenera para dois termos, a saber, entendendo por I para já um subconjunto de $\{1, \dots, k\}$,

$$(-1)^{1-1} \sum_{I,|I|=1} |\bigcap_{i\in I} A_i| + (-1)^{2-1} \sum_{I,|I|=2} |\bigcap_{i\in I} A_i| \,.$$

Ora, a soma $\sum_{I,|I|=i} ....$ que aqui ocorre, exorta-nos formar para cada subconjunto $I \subseteq \{1, 2, \dots, k\}$ de cardinalidade i a intersecção $\bigcap_{i\in I} A_i$, tomar a sua cardinalidade, e somar as cardinalidades assim obtidas. Para o caso $k = 2$ ocorrem apenas valores $i = 1$ e $i = 2$. Os subconjuntos I de cardinalidade 1 de $\{1, 2\}$ são $\{1\}$ e $\{2\}$, e de cardinalidade 2 existe apenas o conjunto $\{1, 2\}$. Ora uma expressão $\bigcap_{i\in I} A_i$, degenera no caso $|I| = 1$ para o único conjuntos A_i com $i \in I$. Para $I = \{1\}$ a expressão é $\bigcap_{i\in\{1\}} A_i = A_1$; para $I = \{2\}$ e $I = \{1, 2\}$ respectivamente, as expressões obtidas são A_2 e $A_1 \cap A_2$ respectivamente. Assim a soma referida é $(-1)^0(|A_1| + |A_2|) + (-1)^1(A_1 \cap A_2) = |A_1| + |A_2| - |A_1 \cap A_2|$; e a afirmação diz portanto $|A_1 \cup A_2| = |A_1| + |A_2| - |A_1 \cap A_2|$, facto que já sabemos.

Para $k = 3$, os conjuntos I são 'tirados' do conjunto $\{1, 2, 3\}$; existem neste três subconjuntos singulares, $(\{1\}, \{2\}, \{3\})$, três de cardinalidade 2 $(\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\})$, e um de cardinalidade 3: o conjunto $\{1, 2, 3\}$ mesmo. A fórmula a provar é neste caso

$$\begin{aligned}|A_1 \cup A_2 \cup A_3| &= \sum_{I,|I|=1} |\bigcap_{i\in I} A_i| - \sum_{I,|I|=2} |\bigcap_{i\in I} A_i| + \sum_{I,|I|=3} |\bigcap_{i\in I} A_i| \\ &= |A_1| + |A_2| + |A_3| - (|A_1 \cap A_2| + |A_1 \cap A_3| + |A_2 \cap A_3|) \\ &\quad +|A_1 \cap A_2 \cap A_3|.\end{aligned}$$

Provemo-la: Temos

$$\begin{aligned}|A_1 \cup A_2 \cup A_3| &= |(A_1 \cup A_2) \cup A_3| \\ &= |(A_1 \cup A_2)| + |A_3| - |(A_1 \cup A_2) \cap A_3| \\ &= (|A_1| + |A_2| - |A_1 \cap A_2|) + |A_3| - |(A_1 \cap A_3) \cup (A_2 \cap A_3)|\end{aligned}$$

e portanto

$$
\begin{aligned}
|A_1 \cup A_2 \cup A_3| &= (|A_1| + |A_2| - |A_1 \cap A_2|) + |A_3| \\
&\quad -(|A_1 \cap A_3| + |A_2 \cap A_3| - |(A_1 \cap A_3) \cap (A_2 \cap A_3)|) \\
&= |A_1| + |A_2| + |A_3| - |A_1 \cap A_2| - |A_1 \cap A_3| - |A_2 \cap A_3| \\
&\quad +|A_1 \cap A_2 \cap A_3|,
\end{aligned}
$$

como queríamos mostrar. Aplicámos aqui várias vezes o princípio da inclusão-exclusão para o caso de dois conjuntos.

Nos vemos um padrão emergente. Tais são os padrões que levam a descobertas - no caso presente aliás atribuido ao português Daniel da Silva.

Agora vamos coroar os nossos esforços com uma prova formal do teorema.

Demonstração do principio da inclusão-exclusão. A demonstração desse, teorema faz-se por indução sobre o número dos conjuntos em causa. Para $k = 1$ sai a trivialidade $|A_1| = |A_1|$, para $k = 2$, e $k = 3$ a análise anterior já nos convenceu da válidade do princípio.

Agora seja $k \geq 2$. Definamos as famílias disjuntas $\mathcal{I}$ e $\mathcal{I}'$ de subconjuntos de $\{1, \ldots, k, k+1\}$ por

$$
\mathcal{I} = \{I : k+1 \notin I\}, \qquad \text{e} \qquad \mathcal{I}' = \{I : k+1 \in I\},
$$

respectivamente. Podemos escrever

$$
\begin{aligned}
|\bigcup_{i=1}^{k+1} A_i| &= |\left(\bigcup_{i=1}^{k} A_i\right) \cup A_{k+1}| \\
&\overset{1}{=} |\bigcup_{i=1}^{k} A_i| + |A_{k+1}| - |\left(\bigcup_{i=1}^{k} A_i\right) \cap A_{k+1}| \\
&\overset{2}{=} |\bigcup_{i=1}^{k} A_i| + |A_{k+1}| - |\bigcup_{i=1}^{k} (A_i \cap A_{k+1})| \\
&\overset{3}{=} \sum_{i=1}^{k} (-1)^{i-1} \sum_{I \in \mathcal{I}, |I|=i} |\bigcap_{i \in I} A_i| + |A_{k+1}| \\
&\quad - \sum_{i=1}^{k} (-1)^{i-1} \sum_{I \in \mathcal{I}, |I|=i} |\bigcap_{i \in I} (A_i \cap A_{k+1})|,
\end{aligned}
$$

Em $\overset{1}{=}$ utilizámos a hipótese da indução para dois conjuntos, em $\overset{2}{=}$ a distributividade (ver p.concfund4c1), e em $\overset{3}{=}$ utilizámos hipótese da indução para k conjuntos.

Ora, se $I \in \mathcal{I}$ então $\bigcap_{i \in I} (A_i \cap A_{k+1}) = \bigcap_{i \in I \cup \{k+1\}} A_i$. Se I percorrer todos os conjuntos de $\mathcal{I}$ com cardinalidade i, então $I \cup \{k+1\}$ percorre todos os conjuntos de $\mathcal{I}'$ com cardinalidade $i+1$. Logo podemos erescrever a segunda soma interior na forma

$$\sum_{I\in\mathcal{I},|I|=i} |\bigcap_{i\in I}(A_i\cap A_{k+1})| = \sum_{\substack{I\in\mathcal{I}'\\|I|=i+1}} |\bigcap_{i\in I} A_i|.$$

Dediquemo-nos à primeira soma. Esta podemos decompor na parcela correspondente a $i=1$, e nas restantes. Repara que se $|I|=1$, então a intersecção $\bigcap_{i\in I} A_i$ dá o único conjunto referido em I. Mais usaremos a fórmula $\sum_{i=2}^{k}\phi_i = \sum_{i=1}^{k-1}\phi_{i+1}$, que é valida para quaisquer objectos ϕ_i associados aos i e somáveis. Assim

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{k}(-1)^{i-1}\sum_{I\in\mathcal{I},|I|=i}|\bigcap_{i\in I}A_i| &= \sum_{I\in\mathcal{I},|I|=1}|\bigcap_{i\in I}A_i| + \sum_{i=2}^{k}(-1)^{i-1}\sum_{I\in\mathcal{I},|I|=i}\ldots\\
&= \sum_{i=1}^{k}|A_i| + \sum_{i=2}^{k}(-1)^{i-1}\sum_{I\in\mathcal{I},|I|=i}\ldots\\
&= \sum_{i=1}^{k}|A_i| + \sum_{i=1}^{k-1}(-1)^{i}\sum_{I\in\mathcal{I},|I|=i+1}|\bigcap_{i\in I}A_i|.
\end{aligned}$$

Finalmente, juntando os resultados obtidos,

$$\begin{aligned}
|\bigcup_{i=1}^{k+1}A_i| &= \sum_{i=1}^{k}|A_i| + \sum_{i=1}^{k-1}(-1)^{i}\sum_{I\in\mathcal{I},|I|=i+1}|\bigcap_{i\in I}A_i|\\
&\quad -\sum_{i=1}^{k}(-1)^{i-1}\sum_{\substack{I\in\mathcal{I}'\\|I|=i+1}}|\bigcap_{i\in I}A_i| + |A_{k+1}|\\
&\overset{1}{=} \sum_{i=1}^{k+1}|A_i| + \sum_{i=1}^{k-1}(-1)^{i}\ldots + \sum_{i=1}^{k-1}(-)^{i}\ldots + (-)^{k}\ldots\\
&= \sum_{i=1}^{k+1}|A_i| + \sum_{i=1}^{k-1}(-1)^{i}(\sum_{I\in\mathcal{I},|I|=i+1}\ldots + \sum_{I\in\mathcal{I}',|I|=i+1}\ldots) + (-)^{k}\ldots\\
&= \sum_{i=1}^{k+1}|A_i| + \sum_{i=1}^{k-1}(-1)^{i}(\sum_{\substack{I\in\mathcal{I}\uplus\mathcal{I}'\\|I|=i+1}}\ldots) + (-)^{k}\ldots\\
&= \sum_{i=1}^{k+1}|A_i| + \sum_{i=2}^{k}(-1)^{i-1}(\sum_{\substack{I\subseteq\{1,\ldots,k+1\}\\|I|=i+1}}\ldots) + (-)^{k}\ldots\\
&= \sum_{i=1}^{k+1}(-1)^{i-1}\sum_{\substack{I\subseteq\{1,\ldots,k+1\}\\|I|=i}}|\bigcap_{i\in I}A_i|
\end{aligned}$$

Aqui, em $\stackrel{1}{=}$, 'engolímos' $|A_{k+1}|$ no primeiro somatório, deixámos o segundo somatório exterior inalterado, e decompusemos o terçeiro somatório exterior segundo

$$-\sum_{i=1}^{k}(-)^{i-1}\text{coisa}_i = \sum_{i=1}^{k}(-)^{i}\text{coisa}_i = \sum_{i=1}^{k-1}(-)^{i}\text{coisa}_i + (-1)^k\text{coisa}_k.$$

As transformações que se fizeram nas restantes linhas deviam agora ficar claro, notando que $\mathcal{I} \uplus \mathcal{I}' =$família de todos os subconjuntos de $\{1, \ldots, k, k+1\}$. O teorema fica provado. $\square$

O princípio de inclusão exclusão, tal como aparentemente todos os 'grandes teoremas' da matemática permite várias versões e admite corolários interessantes alguns dos quais vamos deixar aqui como exercícios e problemas.

Corolário 3.1. *Nas condições do teorema anterior, a cardinalidade da família dos conjuntos que não estão em nenhum dos conjuntos $A_1, \ldots, A_k$ é dada por*

$$|\Omega - \bigcup_{i=1}^{k} A_i| = |\Omega| - \sum_{i=1}^{k}(-1)^{i-1}\,(\sum_{\substack{I \subseteq \{1,\ldots,k\},\\ |I| = i}} |\bigcap_{i\in I} A_i|\,).$$

Prova. Exercício muito fácil. $\square$

Corolário 3.2. *Supostas as condições do principio da inclusão-exclusão, seja $I \subseteq \{1, 2, \ldots, k\}$ um conjunto de índices. Então, a cardinalidade do conjunto dos elementos de Ω que estão em exactamente os conjuntos A_i com $i \in I$, é dada por*

$$c(I) := \sum_{\substack{J \subseteq \{1,\ldots,k\}\\ J \supseteq I}} (-1)^{|J-I|}|\bigcap_{j\in J} A_j|\,.$$

Prova. Escreva-se primeiro o referido conjunto em termos da linguagem dos conjuntos. Após aplicação da regra da distributivade vê-se que se pode aplicar o corolário anterior. Os pormenores ficam como problema para o leitor. $\square$

Corolário 3.3. *Nas condições do princípio da inclusão-exclusão, seja $p \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. A cardinalidade do conjunto dos elementos que estão em exactamente p dos conjuntos A_i é dada por*

$$\sum_{j=p}^{k}(-)^{j-p}\binom{j}{p} \sum_{\substack{J \subseteq \{1,\ldots,k\}\\ |J| = j}} |\bigcap_{j\in J} A_j|.$$

Prova. Recorre-se ao corolário anterior. Os pormenores são para o leitor. $\square$

Exemplo . a. Nas explicações atrás ocorreram somas bastante complicadas. Aqui mais umas observações sobre a utilização de somatórios. Em geral uma expressão $\sum_{i\in I}\phi_i$ faz sentido se I for um conjunto finito e se a cada $i \in I$ é associado um 'objecto' ϕ_i de uma classe, de objectos que podem ser somados (por exemplo: números reais, ou vectores, mas a matemática conhece outros objectos pertencentes em geral a assim chamados 'espaços vectoriais'). Neste caso $\sum_{i \in I} \phi_i$ é simplesmente uma simbologia que exorta escrever os objectos ϕ_i um ao lado do outro, e ligar estes objectos pelo '+'. Por exemplo $\sum_{j \in \{1,3,5\}} j^2$ dá $1^2 + 3^2 + 5^2$. Se I for vazio, então atribui-se à soma geralmente o valor 0. Os objectos ϕ_i podem outra vez ser objectos complicados dependente do parámetro i, porventura outras somas, como aconteceu em cima. Mais, os somatórios nem sempre ocorrem na forma canónica $\sum_{i \in I} \ldots$, mas um conjunto I adequado para pôr o somatório nesta forma pode ser inferido do contexto. Em particular aplicam-se a somatórios as convencões referidas para os símbolos $\bigcup, \bigcap$, ver p.concfund3c-2. A avaliação desambigua de somas múltiplas baseia-se nas varias leis que regem os cálculos em espaços vectoriais. São leis como a comutatividade, a associatividade da adição, leis de distributividade etc. Mais existem, e são importantissimos, somatórios que involvem uma infinidade de parcelas: por exemplo, em $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^2}$. Somas deste tipo são discutidos na teoria dos limites, ver p. ... . Estamos convictos que, lendo muita matemática, vão habituar-se pouco a pouco à simbologia dos somatórios e outras simbologias afins de forma similar àquela com que se habituaram ao uso correcto da lingua materna.

b. Mais aplicações do princípio da inclusão-exclusão vamos dar como problemas separados e também veremos na teoria dos números.

c. Princípios de inclusão-exclusão são válidas também para certas outras medidas: por exemplo, se $A, B, A \cup B, A \cap B$ são subconjuntos do plano com 'àrea', então temos área$(A \cup B)$ + área$(A \cap B)$ = área(A) + área(B), e fórmulas análogas para mais que dois conjuntos.