por **Amílcar Branquinho, Alexander Kovačec, Jorge Neves, Eduardo Marques de Sá e António Salgueiro**
[Departamento de Matemática, Universidade de Coimbra]

Balanças e Alavancas

O Projecto Delfos nasceu em 2001, da ideia de uma escola dedicada aos estudantes do ensino não superior mais interessados pela Matemática, com gosto por esta disciplina.

Caro Leitor,

Com este número abre-se uma nova coluna que será regular e duradoura se a vida for como são as intenções. No tempo e no espaço que tivermos, o tema vai ser o que a Matemática sempre foi: a resolução de problemas.

Sendo hoje a estreia, será melhor que nos apresentemos. O *Projecto Delfos* nasceu em 2001, da ideia de uma escola dedicada aos estudantes do ensino não superior mais interessados pela Matemática, com gosto por esta disciplina. Contamos com alunos e professores, com todos os que queiram abrir um espaço informal na periferia das matérias escolares tradicionais, movidos pelo gozo do labirinto matemático, pela procura e descoberta de respostas às questões que a imaginação nos coloque.

Em muitos países desenvolvidos, em que a Matemática é encarada como disciplina central e praticada com insistência desde os primeiros anos de escolaridade, existem escolas desse tipo, dedicadas aos alunos com maior aptidão para a Matemática, onde trabalham docentes de todos os níveis de ensino. Nelas, os alunos são, pelo seu esforço individual e a orientação dos professores, levados a desenvolver as suas competências até ao limite das suas capacidades naturais, objectivo este que deveria ser comum a todas as escolas de um sistema de ensino que aspire à excelência.

Com este horizonte, o *Projecto Delfos* funcionou, de início, em moldes rudimentares, pela exiguidade de meios, pela falta de experiência, por dificuldades conhecidas no nosso país que tarda em afirmar-se, também pelo valor dado à aprendizagem. Em anos mais recentes a nossa actividade tornou-se mais consistente no contacto com os estudantes interessados: um ou dois fins-de-semana por mês e alguns estágios espalhados pelo ano, com despesas de deslocação parcialmente financiadas pelo Programa Ciência Viva. Houve um olhar atento, mas de modo nenhum exclusivo, às Olimpíadas Internacionais e Ibero-Americanas, nas quais vivemos o sucesso dos nossos estudantes. Procedemos a trocas de correspondência para avaliação personalizada de respostas a problemas de testes e textos Delfos, com sugestões e propostas de novos problemas.

Mantemos uma página *web*, http://www.mat.uc.pt/~delfos, onde o leitor poderá visitar-nos, com notícias, ligações, contactos, e parte do material usado na preparação dos alunos. Aí terá notícias da *Liga D'Elfos*, prova matemática por equipas que decorre aos fins-de-semana, disputando audiências às ligas várias do futebol nacional.

O público-alvo que visamos é aquele que nos dá razão de existir: os alunos do ensino não superior e os seus professores. Esta coluna é-vos dedicada e, através dela, esperamos o vosso contacto. Envie as suas soluções para:

Projecto Delfos, Departamento de Matemática
Universidade de Coimbra
3001-454 Coimbra.

No próximo número discutiremos os problemas hoje propostos, publicaremos os nomes dos que enviem soluções correctas e discutiremos algumas delas.

Balanças e alavancas

Em que condições é que uma balança simétrica, como a da figura 1(a), fica em equilíbrio? Todo o mundo sabe que isso acontece quando o peso no prato esquerdo é igual ao peso no prato direito. Essa situação de equilíbrio é ilustrada no diagrama 1(b), onde a balança se reduz a uma alavanca rectilínea que pode girar em torno do ponto *O*, chamado *fulcro*.

Numa balança não simétrica, de braços desiguais, de comprimentos a e b (cf. figura 2), há equilíbrio quando e só quando os números positivos aF e bG são iguais. Aqui indicámos por F a norma do vector $\vec{F}$ e por G a norma do vector $\vec{G}$.[1] Foi Arquimedes (287 - 212 a.C.), apontado como o maior matemático, físico e inventor grego da Antiguidade, quem descobriu esta lei matemática do equilíbrio. As aplicações são inúmeras no nosso dia-a-dia, dos pés-de-cabra aos alicates, macacos, bielas e manivelas, quebra-nozes, corta-unhas, passando por inúmeros tipos de balanças, como as *decimais*, aquelas em que b/a=10, nas quais, para se equilibrar (pesar!) um saco de batatas com peso F, se usa um contrapeso G que é a décima parte de F.

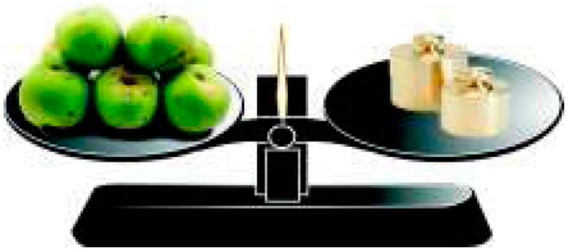

Figura 1(a)

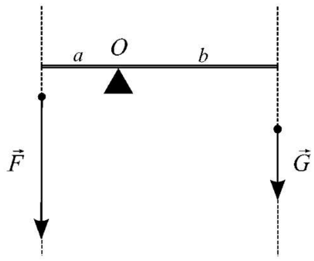

Figura2

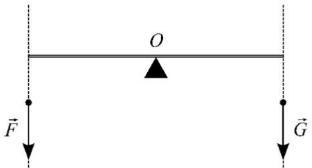

Figura 1(b)

Uma alavanca é um objecto rígido que pode ter qualquer forma e feitio, não apenas a de réguas rectilíneas como nas figuras anteriores, e as forças aplicadas podem ser muitas e com direcções variadas. Para simplificar, apenas consideramos o caso em que tudo está no mesmo plano: a alavanca, as forças e os seus pontos de aplicação.

A teoria olha para uma força de cada vez e para a sua posição *relativamente ao fulcro O* da alavanca. O *braço* de $\vec{F}$, denotado por b, é a distância de O à recta que contém $\vec{F}$. O momento de $\vec{F}$ é o número real que tem módulo bF e que pode ser positivo ou negativo: é positivo se $\vec{F}$ tende a fazer rodar a alavanca no sentido directo, negativo se $\vec{F}$ tende a fazer rodar a alavanca no

[1] Estamos a desprezar o peso dos braços e acessórios da balança. Um fabricante de balanças de precisão não pode dar-se a este luxo, mas nós, aqui, podemos, pois o nosso mundo é o da imaginação sem limites que concebe matérias imponderáveis.

sentido retrógrado. No exemplo da figura 3 o momento é negativo.

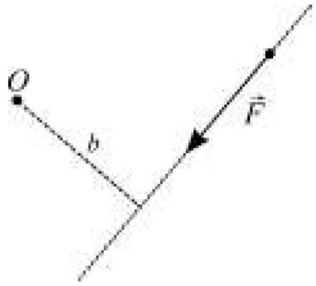

Figura 3

A lei de Arquimedes para o caso duma alavanca e de forças aplicadas que vivam no mesmo plano diz o seguinte:

a condição de equilíbrio da alavanca é que seja nula a soma dos momentos das forças aplicadas, com os momentos calculados relativamente ao fulcro.

O sinal atribuído a cada momento é uma convenção nossa; se tivéssemos adoptado a convenção oposta, a lei de equilíbrio da alavanca não sofreria alteração, como é fácil verificar. Uma boa lei matemática dum fenómeno natural deve ter um alcance que transcende as convenções feitas.

Problema 1

(I) Pretendemos projectar uma alavanca com as seguintes características. Será uma régua (imponderável!) com um fulcro e quatro furos para enganchar pesos: um furo do lado esquerdo do fulcro e três furos do lado direito. Há três pesos fixos, ditos *pesos-padrão*, que deverão, em cada pesagem, enganchar-se nos três furos do lado direito, um em cada furo, de todos os modos possíveis. A carga a pesar colocar-se-á no furo à esquerda, e queremos que seja possível pesar cargas com pesos de 1, 2, 3, 4, 5 e 6 quilogramas. Será possível cumprir este projecto? Se sim, diz como.

(II) Esta alavanca é parecida com a anterior: tem um furo do lado esquerdo do fulcro, à distância 1 do fulcro, e n furos do lado direito, estes a distâncias d_1, d_2,... d_n do fulcro. Há n pesos-padrão de p_1, p_2,... p_n quilogramas a colocar nos furos do lado direito, um e só um em cada furo, de todas as maneiras possíveis. Quais as cargas mínima e máxima que podem colocar-se, em equilíbrio, no furo esquerdo?

(III) Considera o caso particular da alínea (ii) em que $n \geq 4$ e, para cada i=1,...n, a distância d_1 e o peso p_1 valem i unidades. Mostra que é possível pesar todas as cargas inteiras compreendidas entre as cargas mínima e máxima.

Problema 2

Neste problema, a balança é simétrica, de dois pratos, como a da figura 1(a). Temos um *stock* ilimitado de pesos-padrão, uns com p quilogramas e os restantes com q quilogramas, onde p e q são inteiros positivos fixados. Os pesos-padrão podem colocar-se apenas no prato direito, nas quantidades desejadas, e a carga a equilibrar coloca-se no esquerdo.

(I) Caracteriza as escolhas (p,q) possíveis tais que todas as cargas que sejam números inteiros de 32 ou mais quilogramas possam equilibrar-se na balança, mas não seja possível equilibrar uma carga de 31 quilogramas.

(II) Admitindo conheceres o peso de determinada carga, descreve um algoritmo eficiente para calcular um modo de a equilibrar com um número mínimo de pesos-padrão.

(III) Para cada par (p,q) da resposta à alínea (I), designemos por m(p,q) o menor número possível de pesos-padrão a utilizar para equilibrar uma carga com 2007 quilogramas. Determina o par (p,q) para o qual m(p,q) é o menor possível. M