por Amílcar Branquinho e Alexander Kovačec
[Departamento de Matemática, Universidade de Coimbra]

A Toalha da Sorte

Caro leitor,

Imagine que está a preparar a festa de casamento da sua filha. Tudo é preparado sem olhar a gastos, para que a sorte acompanhe os noivos…

Os jardineiros já preparam as flores, a casa com jardim alugada, por um preço justo, mas alto, já alberga as mesas do copo de água, com uma enorme mesa central, cujo tampo está a ser limpo e prestes a receber a toalha bordada com o padrão das demais mesas.

A toalha! Falta a toalha para a mesa principal! Como foi possível esquecer-se dela? Pensa: "o dinheiro não pode ser problema, mas onde poderei encontrar uma toalha tão grande e com o mesmo padrão das demais mesas?" Para além de que está a um dia do grande evento da sua vida...

Lembra-se então de que tem em casa vários rolos de tecido com larguras variadas e cores diferentes. A sua intuição diz-lhe que há males que vêm por bem, e que uma toalha às cores garantirá que a sorte acompanhe os noivos para o resto da vida. Temos que verificar rapidamente se é possível cobrir a mesa com os rolos. Mas nada pode ficar a descoberto, i.e. a mesa deve ficar coberta do tampo aos pés.

Deu consigo a calcular de forma aproximada a área de tecido suficiente para confeccionar a toalha. Dizia para si: "a mesa tem 9 metros de diâmetro e 1 metro de altura, os rolos têm todos 10 metros de comprimento por 0.5, 1.1, 1.2 ou 2 metros de largura. Portanto tem que cobrir uma área de $(9/2)^2\,\pi \cong (80/4) \times 3 = 60\ \text{m}^2$ com tiras de tecido de $10 \times 7.5 = 75\ \text{m}^2$ de superfície.

A sua formação de engenheiro dizia-lhe que tudo se consegue. Óptimo! Esta conclusão resultou da urgência da situação em que se encontrava, pois a pressa pouco espaço deixa para qualquer reflexão aprofundada…

É neste contexto que surge o nosso primeiro problema.

Problema 1: Pegue em fitas e num disco de papel ou cartolina. Encontre condições necessárias e suficientes para cobrir completamente um disco circular de diâmetro d com n fitas de comprimento maior do que d e de larguras $d_1, d_2, \ldots, d_n$. Ver figura 1.

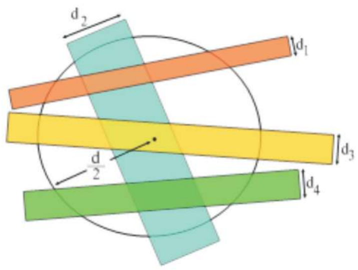

Figura 1

Foi o famoso matemático polaco Alfred Tarski que propôs o seguinte problema: *Suponha que uma região convexa e compacta D do plano é coberta por um número numerável de fitas rectangulares. Será que a soma das suas larguras domina a largura de D?*

Foram muitos os matemáticos que tentaram em vão resolver este problema, até que 20 anos mais tarde o dinamarquês Thoger Bang o resolveu.

Como em muitos outros problemas matemáticos, a solução para o caso especial do disco aqui proposto, o dado fundamental encontra-se numa ideia de Arquimedes no livro *Sobre a Esfera e o Cilindro*, que passaremos a analisar, estabelecendo pontes para a sua aplicação.

O leitor observe a figura 2. Vemos uma esfera S dentro de um cilindro C com o mesmo diâmetro e altura. Uma semi-recta com origem no eixo de C e perpendicular a este projecta cada ponto p de S radialmente para um ponto $\hat{p}$ de C. Entre dois quaisquer planos paralelos da esfera de S encontramos ainda uma certa região B acinzentada e a sua imagem radial $\hat{B}$ em C.

Problema 2: (Ideia de Arquimedes)

a. As áreas de B em S e da sua imagem $\hat{B}$ em C obedecem a uma relação muito simples. Qual é? Demonstre esta relação.

b. Que consequência importante tem este resultado para a cartografia?

c. Em particular podemos tirar daí a fórmula para a área da esfera?

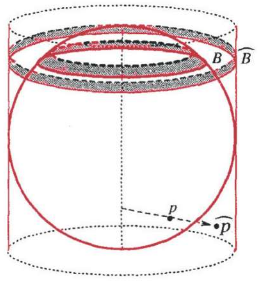

Figura 2

Resolvido este segundo problema, o leitor está quase em condições de provar a conjectura.

Problema 3: Observe a figura 3 e pense em medir as áreas do disco, não de forma convencional, mas através das áreas projectadas para a esfera. De tal modo que mesmo pequenas parcelas perto da fronteira do disco têm uma área grande (cf. figura 3). Prove a conjectura estabelecida no problema 1.

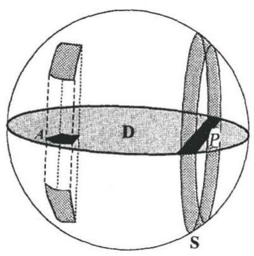

Figura 3

Um enredo de ideias absolutamente extraordinário…

Bem, como ainda temos algum espaço vamos resolver o primeiro problema que colocámos há cerca de um ano, em Julho de 2008, na coluna de abertura, sobre Balanças e Alavancas (cf. *Gazeta de Matemática* n.° 155). Deixamos para o próximo número as resoluções correctas dos problemas 2 e 3 do Canto III, pelo leitor Carlos Alberto Silva Gomes.

Problema: Pretendemos projectar uma alavanca com as seguintes características. Será uma régua (imponderável!) com um fulcro e quatro furos para enganchar pesos: um furo do lado esquerdo do fulcro e três furos do lado direito. Há três pesos fixos que deverão, em cada pesagem, enganchar-se nos três furos do lado direito, um em cada furo. A carga a pesar será colocada no furo à esquerda, e queremos que seja possível pesar cargas com pesos de 1, 2, 3, 4, 5 e 6 quilogramas. Será possível cumprir este projecto? Se sim, diga como.

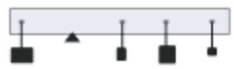

Figura 4

Solução: Vamos provar por redução ao absurdo que é impossível projectar tal alavanca. Suponhamos a existência de uma balança consistindo em pesos padrão $p_1 \leq p_2 \leq p_3$ e uma alavanca com distâncias dos furos do lado direito ao fulcro dadas por $0 < d_1 \leq d_2 \leq d_3$; ver figura 4. Sem perda de generalidade podemos supor o furo do lado esquerdo a uma distância 1 do fulcro. Há seis maneiras de enganchar os pesos p_i: são parametrizadas pelas seis permutações π dos inteiros 1, 2, 3. Se escrevermos $\pi = 231$, digamos, isto significa $\pi(1) = 2$, $\pi(2) = 3$, $\pi(3) = 1$. Segundo a lei de Arquimedes sabemos que a carga C_π equilibrada pela permutação π dos pesos padrão, isto é, pondo o peso padrão $P_{\pi(i)}$ no i-ésimo buraco, $i = 1, 2, 3$ é dada por $C_\pi = \sum_{i=1}^{3} p_{\pi(i)} d_i$.

Como falamos de seis cargas distintas, 1, 2, 3, 4, 5, 6, precisamos, de facto, de distâncias e de pesos diferentes: as desigualdades acima são estritas. É fácil ver que sempre que trocarmos as posições de um peso

p' mais perto do fulcro por um peso menor p mais longe do fulcro, precisamos para restabelecer o equilíbrio de uma carga maior do que antes: isto é consequência da desigualdade $p'd+pd'<pd+p'd'$ sendo $0<p<p', 0<d<d'$.

Isto dá-nos informação parcial sobre quais os pesos que determinada permutação eventualmente permite equilibrar.

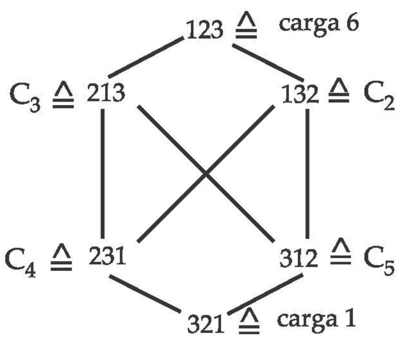

Figura 5

O diagrama da figura 5 resume esta informação. As cargas 1, 2, 3, 4, 5, 6 a equilibrar devem estar associadas aos vértices de modo que qualquer caminho ascendente ligue cargas crescentes. Em particular, a menor carga, 1, deve ser equilibrada pela permutação 321 à maior, 6, pela permutação 123. A permutação 231 equilibra uma menor carga do que 132, etc; vemos que as cargas 2, 3, 4, 5 devem ser associadas aos quatro vértices restantes numa das quatro formas

$$\begin{matrix}4&5\\2&3\end{matrix}\,,\quad \begin{matrix}5&4\\2&3\end{matrix}\,,\quad \begin{matrix}4&5\\3&2\end{matrix}\,,\quad \begin{matrix}5&4\\3&2\end{matrix}$$

onde as posições relativas correspondem às posições dos quatro vértices no meio do diagrama. Cada escolha define um esquema $\begin{matrix}c_3&c_2\\c_4&c_5\end{matrix}$.

O nosso problema é decidir se existem escolhas p_i, d_i e um esquema de cargas como sendo um dos quatro indicados de modo que o sistema linear

$$\begin{bmatrix}p_1&p_2&p_3\\p_1&p_3&p_2\\p_2&p_1&p_3\\p_2&p_3&p_1\\p_3&p_1&p_2\\p_3&p_2&p_1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}d_1\\d_2\\d_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6\\c_2\\c_3\\c_4\\c_5\\1\end{bmatrix}.$$

tenha solução. Ora se subtrairmos a equação da linha 6 à da linha 1, isto é, se fizermos uma operação que denotamos $l_1 - l_6$, obtemos

$$\begin{aligned}&(p_1-p_3)\,d_1+(p_3-p_1)\,d_3\\&=(p_1-p_3)\,(d_1-d_3)=6-1=5\end{aligned}$$

De formas semelhantes $l_5 - l_3$ dá $(p_3-p_2)(d_1-d_3) = C_5 - C_3$, e finalmente $l_4 - l_2$ dá $(p_2-p_1)(d_1-d_3) = C_4 - C_2$.
Mas como $d_1 \neq d_3$, obtemos, somando estas equações, que a condição

$$0 = 5 + C_4 + C_5 - C_2 - C_3 =: s$$

é necessária para solubilidade do sistema.
Ora como as quatro atribuições possíveis dos inteiros 2, 3, 4, 5 às variáveis C_2, C_3, C_4, C_5 dão todas $C_4+C_5=5$, $C_2+C_3=9$, vemos que

$$s = 10 - 9 = 1 \neq 0$$

Logo não existe a alavanca projectada.

Esperamos pela sua resolução destes três problemas, bem como pela resolução dos problemas propostos nos cantos anteriores. M

Envie as soluções para

Projecto Delfos
Departamento de Matemática da FCTUC
Apartado 3008
EC Universidade
3001-454 COIMBRA