A1. Efetue os seguintes produtos de matrizes:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \\ 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \delta \end{bmatrix}.$$

A2. [*Distributividade*] Considere matrizes A, $n \times m$ e B e C, $m \times r$. Mostre que $A(B+C) = AB + AC$.

A3. [*Lei do salto*] Sejam A, B duas matrizes tais que AB se possa calcular. Dado $\alpha \in \mathbb{R}$, αA denota a matriz que se obtém multiplicando todas as entradas por α. Mostre que $\alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B)$.

A4. Seja A uma matriz quadrada $n \times n$. Mostre que se X_1 e X_2 são duas matrizes $n \times 1$ que pertencem ao núcleo de A então a matriz $\alpha X_1 + \beta X_2$ também pertence, para todo o $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

A5. Considere matrizes A_1, do tipo $n \times k$, A_2, do tipo $n \times r$, A_3, do tipo $m \times k$, A_4, do tipo $m \times r$, B_1 do tipo $k \times s$, B_2 do tipo $k \times t$, B_3 do tipo $r \times s$, B_4 do tipo $r \times t$. Mostre que $AB = C$ onde,

$$A = \left[\begin{array}{c|c} A_1 & A_2 \\ \hline A_3 & A_4 \end{array}\right], \quad B = \left[\begin{array}{c|c} B_1 & B_2 \\ \hline B_3 & B_4 \end{array}\right] \quad \text{e} \quad C = \left[\begin{array}{c|c} A_1B_1 + A_2B_3 & A_1B_2 + A_2B_4 \\ \hline A_3B_1 + A_4B_3 & A_3B_2 + A_4B_4 \end{array}\right].$$

A6. Seja $A = \left[\begin{smallmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right]$, sobre $\mathbb{Z}/11$. Mostre que $A^{2013} = -I$, onde I é a matriz identidade 2×2.

A7. Seja A uma matriz quadrada $n \times n$. Define-se o traço de A (e denota-se por $\operatorname{tr}(A)$) pela soma das entradas na diagonal de A. Mostre que $\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)$.

A8. Sejam A e B duas matrizes 2×2. Mostre que $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.

A9. Seja A uma matriz 2×2 com entradas inteiros. Suponha que A é invertível e a inversa é uma matriz com entradas inteiros. Mostre que $\det(A) = \pm 1$.

A10. Seja G um grafo orientado, *i.e.* um par que consiste de um conjunto de vértices $V_G = \{1, \ldots, n\}$ e de um conjunto de arestas $E_G \subset V_G^2$. Note que ao contrário de um grafo (não-orientado), a aresta (i,j) é diferente da aresta (j,i). Seja A a matriz (sobre $\mathbb{R}$) de zeros e uns tal que $A_{ij} = 1$ se e só se $(i,j) \in E_G$. Mostre que A^n_{ij} é igual ao número de caminhos entre os vértices i e j com exatamente n arestas.

A11. Seja A uma matriz 2×2 cujo determinante é não nulo. Mostre que $A^{-1} = \frac{1}{\det A} \operatorname{ad}(A)$.

A12. Mostre que A, uma matriz 2×2 não é invertível se e só se uma das suas colunas é múltipla da outra se e só se uma das suas linhas é múltipla da outra. Deduza que A é invertível se e só se $N(A) = \{\left[\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right]\}$.

A13. Seja A uma matriz quadrada $n \times n$, $\lambda \in \mathbb{R}$ e $X \neq 0$ uma matriz (coluna) do tipo $n \times 1$. Então, diz-se que λ é valor próprio de A e que X é vetor próprio de A se $AX = \lambda X$, ou seja, se $X \in N(A - \lambda A)$. Suponha $n = 2$. Mostre que λ é vetor próprio de A se e só se λ é zero do polinómio $p(t) = \det(A - tI)$. [O polinómio $p(t)$ definido anteriormente designa-se por polinómio característico da matriz.]

A14. Seja A uma matriz 2×2 cujo polinómio característico tem dois zeros distintos: λ_1 e λ_2. Mostre que se X_1 é um vetor próprio associado a λ_1 e X_2 é um vetor próprio associado a λ_2 então a matriz $B = [X_1|X_2]$ é invertível e $B^{-1}AB$ é uma matriz diagonal.

A15. Seja $A = \left[\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{smallmatrix}\right]$, sobre $\mathbb{Z}/11$. Mostre que existe uma matriz B invertível tal que $B^{-1}AB$ é diagonal.

A16. Suponha que $A = B \left[\begin{smallmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{smallmatrix}\right] B^{-1}$. Mostre que para todo o $k \in \mathbb{Z}$ se tem $A^k = B \left[\begin{smallmatrix} \lambda_1^k & 0 \\ 0 & \lambda_2^k \end{smallmatrix}\right] B^{-1}$

A17. Suponha que A tem dois valores próprios λ_1 e λ_2. Mostre que $\operatorname{tr}(A^n) = \lambda_1^n + \lambda_2^n$.

A18. Seja $A = \left[\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right]$, sobre $\mathbb{R}$, e seja F_n o n-ésimo número de Fibonacci. Mostre que $A^n = \left[\begin{smallmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{smallmatrix}\right]$. Use este facto para mostrar que $F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right)$.

A19. Sejam A e B duas matrizes 2×2 com entradas inteiros. Suponha que A, $A+B$, $A+2B$, $A+3B$ e $A+4B$ são matrizes invertíveis cujas inversas são também matrizes de inteiros. Mostre que então B não é invertível. Dê exemplo de duas matrizes A e B cuja entradas são todas não-nulas e que satisfazem as hipóteses do enunciado.

A20. [*Caso particular do Teorema de Cayley–Hamilton*] Seja A uma matriz 2×2 sobre um corpo qualquer. Seja $P(\lambda) = \lambda^2 + a\lambda + c$ o seu polinómio característico. Suponhamos que $P(\lambda)$ tem dois zeros distintos. Mostre que $P(A) = A^2 + aA + cI = 0$, onde I é a matriz identidade 2×2. [A resolução usando explicitamente as entradas da matriz dispensa a hipótese sobre os valores próprios.]

A21. Para que valores de n é verdade que $ABAB = 0 \implies BABA = 0$, onde A e B são matrizes quadradas $n \times n$ sobre um corpo arbitrário?

A22. Seja $f\colon \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{Z}^2$ a função definida por $f(n,m) = (n+m, n+3m)$. Determine o menor $k > 1$ tal que $f^{(k)}(n,m) \equiv (n,m) \mod 73$, para todo $(m,n) \in \mathbb{Z}^2$.