1. Prova que, se $(n-1)|k$, então $(n-1)^2|(n^k-1)$, onde $n, k \in \mathbb{N} = \{1, 2, \ldots\}$.

2. Mostra que $\sqrt[3]{7+5\sqrt{2}} + \sqrt[3]{7-5\sqrt{2}}$ é um número racional e calcula-o. (**Indicação**: $(x+y)^3 = x^3 + 3xy(x+y) + y^3$.)

3. (a) Seja $p \geq 2$ um número primo. Mostra que, sendo i um inteiro tal que $2 \leq i \leq p-2$, existe um inteiro $2 \leq j \leq p-2$ tal que $i \neq j$ e $i\,j \equiv 1 \mod p$.

   (b) Deduza o Teorema de Wilson: $\prod_{j=1}^{p-1} j \equiv -1 \mod p$.

4. Mostra que os números $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$ não podem ser elementos de uma progressão aritmética.

5. Seja S um subconjunto de $n+1$ elementos de $\{1, 2, \ldots, 2n\}$, $n \in \mathbb{N}$. Então existem números $s_1, s_2 \in S$ tais que $s_1|s_2$ e $s_1 \neq s_2$.

6. Mostra que a maior potência de 2 que pertence ao conjunto $T = \{1, 2, \ldots, n\}$ não divide nenhum número de T.

7. Seja $p \geq 5$ um número primo. Então o seu quadrado dividido por 12 tem resto um.

8. Um dado conjunto de 21 números reais satisfaz a seguinte propriedade: a soma de quaisquer 10 desses números é menor do que a soma dos restantes 11. Demonstra que todos os números desse conjunto são positivos.

9. A origem e as extremidades dos dois ponteiros de um relógio formam um triângulo. Repara que esse triângulo tem área nula ao meio-dia exacto e às 6 horas exactas. Mas há outros momentos em que a área do triângulo é nula.

   (a) Determina, com exactidão, esses momentos de área nula.

   (b) Há, por outro lado, certos momentos em que a área do triângulo atinge um máximo. Determina, com exactidão, os momentos de área máxima.

10. Seja P um ponto no interior geométrico de um triângulo equilátero. Demonstra que a soma das distâncias de P aos lados do triângulo não depende da posição de P.

11. **Caso tridimensional**: Seja P um ponto no interior de um tetraedro regular. Mostra que a soma das distâncias de P às faces do tetraedro não depende da posição de P.

12. O polinómio $-2x^3 + 2xy^2 - 7x^2z - 9xyz + 2y^2z + 2xz^2 - 9yz^2 + 7z^3$, pode ser escrito como produto de três polinómios, não constantes, com coeficientes inteiros. Determina esses três polinómios, explicando o raciocínio seguido.

13. Uma instituição bancária atribui a cada cliente, um número de código com cinco dígitos, de 00000 até 99999. Mas nem todos esses 100000 números serão utilizados, por se pretender que os códigos de quaisquer dois clientes difiram em pelo menos duas das cinco posições. Qual é o número máximo de códigos que este critério permite?

14. Demonstra que para todo o número primo p diferente de 2 e de 5, existem infinitos múltiplos de p que se representam na forma $1111\dots1$.

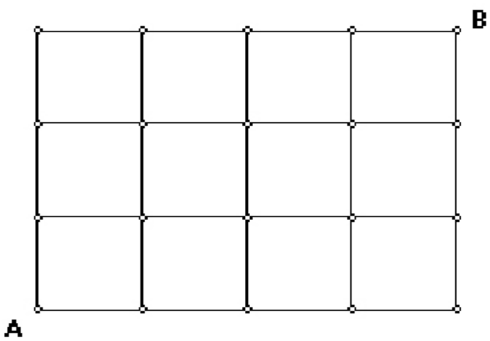
15. Com 21 peças de um "Jogo de Damas", umas brancas e outras pretas, formamos um rectângulo 3×7. Demonstra que existirá sempre um rectângulo com os quatro vértices de uma mesma cor.

16. Sejam a, b, c números reais. Considera os seguintes polinómios de grau 2, $f(x) = ax^2 + bx + c$ e $g(x) = cx^2 + bx + a$. Sabendo que $|f(-1)| \leq 1$, $|f(0)| \leq 1$ e $|f(1)| \leq 1$, mostra que, se $x \in [-1, 1]$, então $|f(x)| \leq 5/4$ e $|g(x)| \leq 2$.

17. Na "*PJ*" há 16 agentes secretos. Cada um deles vigia a alguns dos seus colegas. Sabe-se que se o agente A vigia o agente B, então o agente B não vigia A. Além disso, um grupo qualquer de 10 agentes pode ser numerado de forma que o primeiro vigia o segundo, o segundo vigia o terceiro, $\dots$ e o último (décimo) vigia o primeiro. Demostra que, nas condições descritas, também se pode numerar desta forma um grupo qualquer de 11 agentes.

18. Mostra que não existe uma função $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ que verifica $f(f(n)) = n + 1$.

19. A figura representa uma planta com ruas que delimitam 12 quarteirões quadrados.



Uma pessoa, P, vai de A para B e outra, Q, vai de B para A. Sabendo que ambas partem ao mesmo tempo, seguindo caminhos de comprimento mínimo e se deslocam com a mesma velocidade constante, tendo em cada momento duas possíveis direcções a tomar com igual probabilidade, determina a probabilidade de P e Q se cruzarem.

20. Seja f uma função real de variável real verificando a seguinte equação
$f(\tan(2x)) = \tan^2 x + \cot^2 x$, para $x \in]0, \pi/4[$.

   (a) Escreva $\tan(2x)$ em termos de $\tan x$.

   (b) Mostra que $\tan x$ e $-\cot x$ verificam uma mesma equação quadrática em $\tan(2x)$.

   (c) Determina a expressão analítica de f.

   (d) Mostra que $x + \dfrac{1}{x} \geq 2$, $x \in \mathbb{R}^+$. Reescreva esta desigualdade em termos da função tangente.

   (e) Mostra que $f(\sin(t)) + f(\cos(t)) \geq 20$, $t \in]0, \pi/2[$.

21. No plano cartesiano considera-se o ponto $P_0 = (5, 0)$. O ponto P_1 é a projecção ortogonal de P_0 sobre a bissectriz do primeiro quadrante e P_2 é a projecção de P_1 sobre OX. Vamos determinar uma sucessão de pontos (P_n) verificando a seguinte lei: P_{n+1} *é, para todo o* $n \in \mathbb{N}$, *a projecção ortogonal de* P_n *sobre o segmento* $\overline{P_{n-2}P_{n-1}}$. Note-se, que desta forma P_3 é a projecção ortogonal de P_2 sobre $\overline{P_0P_1}$. Determina as coordenadas de P_n em função de n.

22. Considera dois n-uplos de números reais positivos, (x_j) e (d_j) verificando $d_1 + \cdots + d_n = 1$. Para funções convexas, f, é válida a seguinte desigualdade, $f(d_1 x_1 + \cdots + d_n x_n) \leq d_1 f(x_1) + \cdots + d_n f(x_n)$.

    (a) Identifica a desigualdade anterior.

    (b) Mostra que a função $f(x) = 1/(1+x)$ é convexa em $[0, +\infty[$.

    (c) Aplica o resultado enunciado com a função da última alínea para demonstrar a desigualdade
    $$\frac{x_1^2}{x_1+x_2} + \frac{x_2^2}{x_2+x_3} + \cdots + \frac{x_{n-1}^2}{x_{n-1}+x_n} + \frac{x_n^2}{x_n+x_1} \geq \frac{x_1 + \cdots + x_n}{2}.$$

23. Seja M um conjunto de 1537 inteiros positivos sem divisores primos maiores que 27. Mostra que:

    (a) Qualquer subconjunto de 513 números contém dois cujo produto é um quadrado perfeito.

    (b) M contém um subconjunto de quatro números cujo produto é uma quarta potência.

24. Considera os polinómios $q(x,y) = xy^2 + y + 7$ e $p(x,y) = x^2y + x + y$ como aplicações de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ em $\mathbb{Z}$.

    (a) Constrói um polinómio, $s(x,y)$, mais simples do que os polinómios p, q dados, tal que
    $$q(x,y)|p(x,y) \text{ implica } q(x,y)|s(x,y).$$

    (b) Determina todos os pares (x,y) de inteiros positivos tais que $q(x,y)|p(x,y)$.

25. Seja $\triangle ABC$ um triângulo, b_A, b_B os comprimentos dos bissectores dos ângulos $\hat{A}$ e $\hat{B}$. Mostra que $b_A > b_B$ se e só se $\hat{A} < \hat{B}$.

26. Analisa a existência de soluções reais da equação $\sqrt{x^2 - p} + 2\sqrt{x^2 - 1} = x$, para os valores do parâmetro real p. Resolve a equação.

27. Determina todas as funções, $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, crescentes tais que $f(n + f(n)) = 2f(n)$.

28. Considera os polinómios p e q dados por $p(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + 1$, $q(x) = x^4 + cx^3 + bx^2 + ax + 1$, onde a, b, c são parâmetros reais tais que $a \neq c$. Para que valores dos parâmetros a, b, c os polinómios p, q têm duas raízes em comum. Resolve neste caso as equações $p(x) = 0$ e $q(x) = 0$.

29. Considera um polígono convexo de n lados, com vértices nos pontos $A_1, \ldots, A_n$. Seja P um ponto qualquer no plano.

    (a) Tome $n = 3$ e constrói o triângulo com vétices, B_1, B_2, B_3, que resultam de uma rotação de aplitude α do ponto P relativamente a A_1, A_2, A_3, respectivamente.

    (b) Determina a área do triângulo $[B_1, B_2, B_3]$ em função, do ângulo α e da área do triângulo $[A_1, A_2, A_3]$.

    (c) Seguindo o procedimento enunciado na alínea (a), constrói o polígono convexo de n lados com vértices $B_1, \ldots, B_n$, e determina a sua área.

30. Sejam $n \in \mathbb{N}$ e $x_{0,n}$ a solução positiva da equação $1 + x + \cdots + x^{n-1} = x^n$. Mostra que $x_{0,n}$ é tal que $2 - \frac{1}{2^{n-1}} \leq x_{0,n} < 2 - \frac{1}{2^n}$.

31. Dados os números reais a, b, resolve o sistema $x + y + z = a$, $x^2 + y^2 + z^2 = b^2$, $xy = z^2$.

32. Dados cinco pontos P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 no plano XOY considerado com coordenadas inteiras. Mostra que existem i, j, $1 \leq i < j \leq 5$ e um ponto de coordenadas inteiras Q tal que Q está sobre o segmento $\overline{P_i P_j}$, mas $Q \neq P_i$ e $Q \neq P_j$.

33. Uma *fracção egípcia* é um número racional da forma $1/n$, com $n \in \mathbb{N}$. Mostra que cada número racional positivo pode ser escrito como soma de fracções egípcias distintas.

34. Mostra que, se as faces triangulares dum tetraedro têm todas o mesmo perímetro, então são congruentes.

35. Seja $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$, e $\Omega = \{1, 2, \ldots, n\}$. Mostra que Ω tem tantos subconjuntos de cardinalidade par como de cardinalidade ímpar.
Observação: O conjunto vazio conta como sendo de cardinalidade par, e damos preferência a demonstrações de análise combinatória, que estabeleçam bijecções explícitas entre estas duas famílias de subconjuntos de Ω.

36. Mostra que $\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{3}$ é um número irracional.

37. Mostra que todo o número complexo $z \neq -1$ com $|z| = 1$ se escreve de forma única como $z = \dfrac{1 - \boldsymbol{i}\, x}{1 + \boldsymbol{i}\, x}$, onde $x \in \mathbb{R}$.

38. Sejam $n, n_1, \ldots, n_k \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$. Mostra que os coeficientes multinomiais podem ser expressos em termos dos coeficientes binomiais pela fórmula $\binom{n}{n_1, \ldots, n_k} = \binom{n}{n_1}\binom{n - n_1}{n_2} \cdots \binom{n - n_1 - \cdots - n_{k-1}}{n_k}$.

39. Sejam $A_1, \ldots, A_n$ subconjuntos não vazios, finitos, e distintos de um conjunto Ω.

    (a) Decide com prova ou contra-exemplo se existe um $x \in \Omega$ tal que os conjuntos $A_1 \setminus \{x\}, A_2 \setminus \{x\}, \ldots, A_n \setminus \{x\}$, são todos distintos.

    (b) Qual a resposta se fizermos a restrição $\Omega = \{1, \ldots, n\}$?

40. Sejam $\mathcal{A} = \{A_1, \ldots, A_m\}$ uma família de subconjuntos (distintos) do conjunto $\Omega = \{1, \ldots, n\}$, com a propriedade que $A_i \cap A_j \neq \emptyset$ para $i \neq j$. Mostra que então $m \leq 2^{n-1}$.

41. De entre doze moedas com o mesmo aspecto, onze são genuínas e de igual peso, e uma é falsa. É desconhecido se a falsa é mais pesada ou mais leve do que as genuínas. Descreve um procedimento para identificar, em apenas três pesagens com uma balança de dois pratos, a moeda falsa e determinar se ela pesa mais ou menos do que as outras.

42. Considera agora num conjunto de 1000 moedas de igual aspecto, uma que é falsa por ter um peso distinto das restantes. Determina o número mínimo de pesagens, com uma balaça de dois pratos, necessario para determinar a moeda falsa e se esta pesa mais o menos do que as restantes.

43. Tendo em atenção que a representação decimal de um número real, α, é única, i.e. $\forall\, \alpha \in \mathbb{R}$, existe uma única sucessão $(c_j) \subset \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, tal que $\alpha = [\alpha] + 0, c_1 c_2 \cdots c_n \cdots$, mostra que, a sucessão (c_j) não pode verificar $\exists\, k \in \mathbb{N} :\ c_j = 9,\ \ j = k, k+1, \ldots$.

44. Considera o número real $\beta = 1 - \sqrt{2}$.

(a) Determina $a_n, b_n \in \mathbb{N}$ tais que $\beta^n = a_n - b_n\sqrt{2}\,,\ n \in \mathbb{N}\,.$

(b) Tendo em atenção a representação obtida na alínea anterior para β^n, mostra que $(1+\sqrt{2})^n = a_n + b_n\sqrt{2}\,,\ n \in \mathbb{N}\,.$

(c) Seja p um polinómio com coeficientes inteiros. Mostra que, *se* $p(\beta) = 0$*, então* $p(1+\sqrt{2}) = 0\,.$

(d) Determina a equação recorrente linear de coeficientes constantes de ordem mínima que tem como solução particular β^n .

(e) Mostra que, $\forall\, n \in \mathbb{N}\,,\ \exists\, k \in \mathbb{N}\colon (-\beta)^n = \sqrt{k} - \sqrt{k-1}\,.$

45. Seja $g : \mathbb{N}\times\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definida por $g(n,1) = n\,,\ n \in \mathbb{N}$ e $g(n,m) = n\,g(n,m-1)\,,\ n \in \mathbb{N}\,,\ m \in \mathbb{N}\backslash\{1\}\,.$ Determina a expressão analítica de g .

46. Mostra que existem $3^n - 2^n$ pares (A,B) de conjuntos tais que $A \subset B \subseteq \{1,2,...,n\}$, com $n \in \mathbb{N}$.

47. Sejam A, B, P, Q, R cinco pontos distintos do plano, em que nunhum terno deles está sobre uma mesma recta e dispostos de tal forma que P, Q, R estão todos no mesmo g_{AB}-semiplano. Supondo que os triângulos $\triangle[PAB]$, $\triangle[AQB]$ e $\triangle[ABR]$ são semelhantes, mostra que o centro da circunferência que passa por P, Q, R está sobre a mediatriz do segmento AB .
Indicação: Esboça um desenho fiel que reflita as semelhanças enunciadas. Agora, descreve em termos de potência, quando é que dois pontos A, B estão relativamente a uma circunferência numa posição tal que o centro desta está sobre a mediatriz definida pelo segmento AB.

48. Em qualquer conjunto de n números inteiros, existe um subconjunto S não-vazio, tal que a soma dos números de S é um múltiplo de n .
Indicação: Considera uma cadeia de subconjuntos $A_1 \subset A_2 \subset \cdots \subset A_n = S$ com $|A_1| = 1$. (Aqui $\subset$ representa a inclusão estrita)

49. Verifica se existem pares $(m,n) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ tais que $5m^2 - 6mn + 7n^2 = 1985$.
Indicação: Multiplica ambos os membros por 5, factoriza a expressão obtida e analisa a congruência módulo 13 .

50. Determina todas as funções $f : \mathbb{R}\setminus\{0\} \to \mathbb{R}$ que verificam
$$f(x) = xf(1/x)\,,\ x \neq 0\,,\quad f(x) + f(y) = 1 + f(x+y)\,,\ x \neq -y\,.$$
Indicação: Aplica sucessivamente as duas igualdades, a $2f(x)$, i.e. $2f(x) = 2xf(1/x)$.

51. **XII OPM**. A bordo de um Concorde vão 201 pessoas de 5 nacionalidades diferentes. Sabe-se que em cada grupo de 6 pessoas, pelo menos duas têm a mesma idade. Mostra que no avião há, pelo menos, 5 pessoas do mesmo país, da mesma idade e do mesmo sexo.

52. **XVIII OPM**. Determina todos os pares (p,q) de números positivos tais que $2^p + 1 = q^2$.

53. **XIV OPM**. Uma caixa contém 900 cartões numerados de 100 a 999. O Paulo tira ao acaso um certo número de cartões da caixa e calcula, para cada cartão, a soma dos algarismos nele inscritos. Quantos cartões necessita o Paulo de tirar da caixa para ter a certeza de encontrar pelo menos três cartões cujas somas dos algarismos são iguais?

54. **XVII OPM**. Se duas cordas paralelas de uma circunferência, de comprimento 10mm e 14mm, distarem 6mm uma da outra, quanto mede a corda equidistante dessas duas?

55. **XVI OPM**. Um octógono regular $[ABCDEFGH]$ está inscrito numa circunferência de raio 1, e P é um ponto arbitrário desta circunferência. Calcula o valor de $\overline{PA}^2 + \overline{PB}^2 + \cdots + \overline{PH}^2$.

56. **XIII OPM**. Demonstra que um número real x é racional se e só se a sucessão $x, x+1, x+2, \ldots, x+n, \ldots$ contém pelo menos três termos em progressão geométrica.

57. **XXIII O Paulistas M**. Em *Terra Brasilis* ocorre um importante campeonato de futebol envolvendo 22 clubes. Cada equipa enfrenta uma vez cada uma das demais, recebendo:
    - 5 pontos por vitória quando esta for por diferença superior a dois golos;
    - 3 pontos por vitória quando esta for por diferença de um ou dois golos;
    - 1 ponto por empate;
    - 0 ponto por derrota.

    (a) De quantas maneiras distintas uma equipa pode pontuar nos seus 21 jogos?
    Observação: obter 1 ponto na primeira partida e 5 na segunda e obter 5 pontos na primeira partida e 1 na segunda são maneiras distintas de se pontuar nas duas primeiras partidas.

    (b) Mostra que o número de maneiras distintas de, no final do campeonato, uma equipa totalizar k pontos, $k \in \mathbb{N}$, é igual ao coeficiente de x^k no desenvolvimento de $(x^0 + x^1 + x^3 + x^5)^{21}$.

    (c) Calcula a diferença entre o total de maneiras de um clube obter um número par de pontos e o total de maneiras de obter um número ímpar de pontos.

    (d) Encontra o total de maneiras de um clube obter um número ímpar de pontos.

58. **XXIV O Paulistas M**. Considera as sequências de n bits, $n \in \mathbb{N}$, isto é, sequências de n termos onde cada um dos termos é igual a zero ou um. Por exemplo, para $n = 3$, temos as sequências 000, 001, 010, 100, 110, 101, 011, 111. Definimos *distância* entre duas sequências como sendo o número de bits em que as duas diferem. Por exemplo, a distância entre 001 e 010 é 2, e entre 110 e 100 é 1.

    (a) Qual o número de sequências de 6 bits cuja distância a 000000 é menor do que ou igual a 4?

    (b) Considera um conjunto de sequências de n bits onde a distância entre quaisquer duas sequências é maior ou igual que $2r+1$, $r \in \mathbb{R}$. Mostra que o número de elementos desse conjunto é menor do que ou igual a $2^n / \sum_{k=0}^{r} \binom{n}{k}$.

59. **XXV O Paulistas M**. Estudos com textos de várias línguas indicam que as frequências das palavras nesses textos seguem, aproximadamente, a *Lei de Zipf:*
    Ao contarmos quantas vezes aparece cada uma das palavras de um textos, o número de ocorrências da n-ésima palavra mais frequente é inversamente proporcional a n.
    Assim, por exemplo, a segunda palavra mais comum ocorre com metade da frequência da palavra mais comum.
    Na obra “Fausto ”de J. W. Goethe, a nona palavra mais frequente é “sich”, que ocorre 770 vezes. Sabendo

que o texto completo tem 68470 palavras, calcula o número aproximado de palavras distintas em “Fausto”. As seguintes aproximações podem ser úteis:
$1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\approx \ln n+0{,}58$; $e\approx 2{,}7$; $e^2\approx 7{,}4$; $e^3\approx 20{,}1$; $e^x\approx 1+x+\frac{x^2}{2}$ para $0\leq x\leq 1$.

60. **XXVII O Paulistas M**. Seja AB o diâmetro de uma semicircunferência unitária e O o seu ponto médio. Seja ainda C um ponto sobre a semicircunferência tal que a âmplitude do ângulo $\widehat{ACB}$ é θ, e D a projecção ortogonal de C sobre AB.

    (a) Prova que os triângulos ABC e ACD são semelhantes.

    (b) A partir da semelhança obtida acima demonstra que $\sin(2\theta)=2\sin(\theta)\cos(\theta)$ e ainda que $\cos(2\theta)=2\cos^2(\theta)-1$.

61. Um miúdo está no centro duma piscina circular; o seu irmão na margem. O irmão pode correr quatro vezes mais depressa do que o miúdo pode nadar, mas é mais lento que ele a correr. Será o miúdo capaz de escapar ao irmão?

62. Num quadrado de lados de 10 metros encontramos quatro futebolistas e a bola. Mostra que se quaisquer dois jogadores distam por mais que 7.2 metros, então a bola dista de um deles por menos que 7.1 metros.

63. De quantas formas é possível sentar sete pessoas num círculo, sendo dois arranjos considerados os mesmos se cada pessoa tem o mesmo vizinho.

64. Quantas possibilidades há para casar quatro homens com seis mulheres?

65. Num grupo $\mathbf{G}$ de 1001 pessoas, cada subgrupo de 11 contém pessoas que se conhecem. Mostra que, existem em $\mathbf{G}$ pelo menos 101 pessoas cada uma das quais tem pelo menos 100 conhecidos em $\mathbf{G}$.

66. Mostra que o polinómio $M(x,y,z)=x^4y^2+x^2y^4+z^6-3x^2y^2z^2$ assume apenas valores não-negativos, mas não pode ser escrito como soma de quadrados de polinómios com coeficientes reais.

67. Um colar tem n pérolas, marcadas, cada uma, com um número real. A soma destes reais é 0. Decide se é possível cortar o colar e esticá-lo de maneira que as somas parciais dos números, lidas da esquerda para a direita, são todas não negativas?

68. Cinco matemáticos assistem a uma tediosa palestra. Cada um dos cinco adormece exactamente duas vezes. Para cada par de matemáticos existe um momento em que ambos dormem. Mostra que existe um instante em que dormem pelo menos três dos matemáticos.

69. Qual o valor de $\sqrt{3+\sqrt{8}}-\sqrt{3-\sqrt{8}}$ em termos mais simples?

70. Uma certa turma tem 40 alunos. De entre eles, 14 gostam de matemática, 16 de física, 11 de química, 7 gostam da matemática e da física, 8 gostam da física e da química, 5 gostam da matemática e da química, e 4 gostam das três disciplinas. Quantos alunos não gostam de nenhuma destas disciplinas?

71. Seja $n\in\mathbb{Z}_{\geq 1}$. Mostra que a família de todos os n-uplos de 0’s e 1’s pode ser arranjada numa lista de comprimento 2^n de tal maneira que cada n-uplo difere do seu sucessor em apenas uma posição. Por exemplo, para $n=4$, os 4-uplos 0110 e 0010 diferem apenas na segunda posição.

72. Se a, b, c, d são reais positivos, então $\dfrac{a}{b} > \dfrac{c}{d}$ implica $\dfrac{a}{b} > \dfrac{a+c}{b+d} > \dfrac{c}{d}$.

73. Explica como construir com régua e compasso um triângulo, do qual se sabem as alturas h_a, h_b, e o comprimento da mediana m_a.

    Nota: h_a significa a altura do triângulo relativamente ao lado a. A mediana m_a é o segmento que liga o vertice A ao ponto médio do lado oposto a do triângulo. (Os vértices do triângulo são A, B, C, os lados opostos são a, b, c, respectivamente.)

74. (a) Se a, b, c são lados de um triângulo, então $\sqrt{a}, \sqrt{b}, \sqrt{c}$ também o são.

    (b) A implicação recíproca é verdadeira se, e somente se, $\sqrt{a}, \sqrt{b}, \sqrt{c}$ são medidas de lados dum triângulo *acutângulo*.

75. Determina todos os quadruplos (m, n, x, y) de números naturais tais que, no sistema decimal, $m + n$ tem a forma xx, e $m \cdot n$ tem a forma yyy.

76. Determina quantos inteiros positivos menores que 2005 são simultaneamente múltiplos de 7 e da forma $n^2 + n + 1$.

77. Determina todos os números primos p tais que $(p + 1)/2$ e $(p^2 + 1)/2$ são ambos quadrados perfeitos.

78. Mostra que existe uma coloração a duas cores de um grafo completo com 6 vértices em que nenhum subgrafo completo de 4 vértices é de uma só cor. Por outras palavras, mostra que $R(4, 4) \geq 6$.

79. Mostra que numa coloração a duas cores (azul e verde) de um grafo completo com 19 vértices, existe pelo menos um triângulo azul ou um subgrafo completo com 6 vértices (um hexágono completo) totalmente verde. Por outras palavras, mostra que $R(3, 6) \leq 19$. [Podes usar, sem demonstrar, o facto de que em qualquer coloração a duas cores de um grafo completo com 6 vértices existe sempre um triângulo monocromático.]

80. (a) Enuncia os axiomas da incidência, da medição linear e da separação.

    (b) Com base nestes axiomas (e subjacentes definições) demonstra que:

    i) um segmento tem exactamente um ponto médio; ii) um semiplano é um conjunto convexo.

81. Considera um ponto P no interior duma circunferência $\mathcal{C}$. Por P traça um par de cordas perpendiculares: $AB \perp CD, \quad AB \cap CD = \{P\},$ com $A, B, C, D \in \mathcal{C}$. [Evidentemente, existe uma infinidade de pares de cordas perpendiculares que satisfazem estas condições.]

    “*A quantidade* $|AB|^2 + |CD|^2$ *não depende do par de cordas seleccionado, mas tão-só da posição de* P *e do raio de* $\mathcal{C}$.”

    Verdadeiro ou falso? [Deves justificar a resposta, mas podes usar conhecimentos para além daquilo que demonstrámos no âmbito da axiomática.]

82. Identifica o número cuja representação na base dois é 101101 e representa o número 101 na base três.

83. Considera a função $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ verificando as seguintes condições $f(1) = 1, \quad f(2n + 1) = f(2n) + 1$ e $f(2n) = 3f(n)$. Determina a expressão analítica de f.

84. Resolve em $\mathbb{Z}$ a equação $a^4+5b=b^2+6$, i.e. determina os pares $(a,b)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ tais que $a^4+5b=b^2+6$.

85. Encontra todos os inteiros n tais que $(2^n-1)/3$ é um inteiro que divide um número da forma $4\,m^2+1$ para algum $m\in\mathbb{Z}$.

86. Considera o conjunto $S=\{2,4,8,16,32\}$. Sejam S_1 e S_2 dois subconjuntos de S tais que $S=S_1\cup S_2$ e $S_1\cap S_2=\emptyset$. Sem listar todas as possibilidades para S_1 e S_2, mostra que, ou existem a,b,c em S_1 tais que $ab=c$, ou então existem x,y,z em S_2 tais que $xy=z$.

87. Considera o mesmo conjunto da pergunta anterior, $S=\{2,4,8,16,32\}$. Mostra que em qualquer colecção de 16 subconjuntos de S existe pelo menos um subconjunto cuja soma dos seus elementos é múltipla de 4.

88. Enuncia o axioma da separação e mostra que, semiplanos e politopos são conjuntos convexos.

89. Considera a circunferência $\mathcal{C}$ e dois pontos $A,B\in\mathcal{C}$. Traça segmentos tangenciais AP, BQ, a $\mathcal{C}$ de comprimentos e orientação iguais. Mostra que a semirecta AB^+ divide o segmento PQ ao meio.

90. Considera a função $\boldsymbol{a}:\mathbb{Z}^+\to\mathbb{R}$, onde $\boldsymbol{a}(n)$ é o algarismo das unidades da soma $1+2+\cdots+n$.

a) Determina a expressão analítica para $\boldsymbol{a}$. b) Calcula $\boldsymbol{a}(1)+\boldsymbol{a}(2)+\cdots+\boldsymbol{a}(2005)$.

91. Seja $x_n=1+2+2^2+2^{2^2}+\cdots+2^{2^{2^{\cdot^{\cdot^{2}}}}}$, onde na soma aparecem n termos. Mostra que ${x_n}^n\geq n^n2^{x_{n-1}}$.

92. Mostra que $x^2y+xy^2+y^2z+yz^2+z^2x+zx^2\leq 2(x^3+y^3+z^3)$, para quaisquer reais não negativos x, y, z.

93. Mostra que $\dfrac{a}{b+c}+\dfrac{b}{a+c}+\dfrac{c}{a+b}\geq\dfrac{3}{2}$, para a, b e c reais positivos.

94. Mostra que é possível furar um cubo de modo que pelo buraco possa passar outro cubo do mesmo tamanho.

95. Dois satélites situados no plano equatorial giram em volta do planeta terra em altura constante h. A distância entre A e B é constante igual ao diâmetro $2r$ da terra. Qual a relação necessária e suficiente entre h e r de modo que um observador O num ponto do equador aviste A,B por vezes em ângulos rectos, i.e. tal que $OA\perp OB$.

96. Em quantas regiões, no máximo é o plano dividido por n circunferências?

97. Determina todas as funções reais de variável real, f, tais que
$$(x-y)f(x+y)-(x+y)f(x-y)=4xy(x^2-y^2)\,,\ x,y\in\mathbb{R}.$$

98. A *sucessão de Fibonacci*, (f_n), está definida por $f_1=f_2=1$ e $f_{n+2}=f_{n+1}+f_n$, $n=0,\pm1,\ldots$.

(a) Mostra que, para cada inteiro positivo n se tem $f_{-n}=(-1)^{n+1}f_n$.

(b) Seja ℓ a solução positiva da equação $x^2-x-1=0$. Mostra que, para cada inteiro inteiro positivo n se tem $\ell^n=\ell\,f_n+f_{n-1}$.

(c) Seja $g_n=f_n^2$, $n\in\mathbb{Z}$. Mostra que $g_{n+3}+g_n=2\,(g_{n+2}+g_{n+1})$.

99. Mostra que $x^2+y^2+z^2+xy+yz+zx\geq 0$, para quaisquer reais x,y,z.

100. Se x, y e z são reais não negativos tais que $x+y+z=1$, mostra que $7(xy+yz+zx) \leq 2+9xyz$.

101. Considera o conjunto dos inteiros positivos menores ou iguais a 100: $S=\{1,2,\ldots,100\}$.

   (a) Mostra que existe um subconjunto de S com 74 elementos tal que quaisquer quatro dos seus elementos, dois deles têm um divisor comum diferente de 1.

   (b) Mostra que em qualquer subconjunto de S com 75 elementos existem pelo menos quatro inteiros primos entre si.

102. Seja $\mathcal{C}_1$ uma circunferência no interior de outra, $\mathcal{C}_2$. Seja M o único ponto comum às duas. Uma recta é tangente a $\mathcal{C}_1$ em P e intersecta $\mathcal{C}_2$ em R e em Q. Mostra $R\hat{M}P = P\hat{M}Q$.

103. Considera uma função crescente, $\boldsymbol{a}\colon \mathbb{Z}_{\geq 0} \to \mathbb{Z}_{\geq 0}$, onde $\mathbb{Z}_{\geq 0} = \{0,1,\ldots\}$ tal que todo o inteiro não negativo, m, admite uma única representação como $m = \boldsymbol{a}(i) + 2\boldsymbol{a}(j) + 4\boldsymbol{a}(k)$, onde i,j,k são inteiros não negativos não necessariamente distintos.

   (a) Mostra que existe uma única função de $\mathbb{Z}_{\geq 0}$ em $\mathbb{Z}_{\geq 0}$ com a propriedade enunciada.

   (b) Determina $\boldsymbol{a}(0)$, $\boldsymbol{a}(1)$, $\boldsymbol{a}(2)$, $\boldsymbol{a}(3)$ e $\boldsymbol{a}(2005)$.

104. No plano $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ as rectas $x=a$ e $y=b$, $a,b\in\mathbb{Z}$ determinam um *reticulado*.

   (a) Mostra que área de qualquer triângulo cujos vértices são elementos de $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ é um número racional maior do que ou igual a $1/2$.

   (b) Considera no reticulado dado, um quadrado, Q, 8×8 e um rectângulo, R, 13×5. Decompõe Q nas seguintes figuras, dois triângulos rectângulos de catetos 3 e 8, dois trapézios (união de um rectângulo 3×5 com um triângulo rectângulo de catetos 2 e 5). Comenta a seguinte frase: *Uma diagonal de R determina a mesma decomposição de Q para R.*

   (c) Mostra que, se a área de qualquer triângulo cujos vértices são elementos de $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ é igual a $1/2$ então, não contém no seu interior ou fronteira geométricas nós do reticulado dado. Será o recíproco verdadeiro?

105. Mostra: $a+b+c=0$ implica $a^3+b^3+c^3-3abc=0$.

106. Seja $a_1a_2\cdots a_n$ uma permutação dos números $1,2,\ldots,n$. Por uma *ordenação* entendemos uma operação que troca a_i com a_j, supondo que $i<j$ mas $a_i>a_j$. Por exemplo $41352 \mapsto 41253 \mapsto 21453$ é uma sucessão de duas ordenação. Sejam $a_1a_2\cdots a_n$ e $b_1b_2\cdots b_n$ duas permutações e supõe que para todos os $r,s\in\mathbb{Z}_{\geq 1}$ vale a desigualdade $|\{i : i\geq r,\ a_i\geq s\}| \leq |\{i : i\geq r,\ b_i\geq s\}|$. Mostra que $a_1a_2\cdots a_n$ pode ser transformada em $b_1b_2\cdots b_n$ por uma sucessão de ordenações. (Exemplo: se $a_1a_2\cdots a_5 = 41352$, então $|\{i : i\geq 3, a_i\geq 4\}| = 1$, mas $|\{i : i\geq 2, a_i\geq 3\}| = 2$.)

107. Seja S um conjunto de dez números inteiros com dois digitos. Então existem dois subconjuntos A,B disjuntos e não vazios de S cujos elementos tem a mesma soma.

108. O circuncentro dum triângulo formado pelo incentro e dois vértices dum outro triângulo, $\triangle$, está sobre uma bissectriz de $\triangle$.

109. Se uma família de conjuntos $S_1, \ldots, S_k$ tem a propriedade que a união de quaisquer l conjuntos tem pelo menos l elementos, onde l varia entre 1 e k, então existem elementos distintos $s_1, \ldots, s_k$ tais que $s_1 \in S_1, s_2 \in S_2, \ldots, s_k \in S_k$.

110. **OIAM 1985/1**. Encontra todas as soluções inteiras do seguinte sistema de equações:
$$a + b + c = 24\,, \quad a^2 + b^2 + c^2 = 210\,, \quad abc = 440\,.$$

111. **OIM 1995/1**. Sejam A, B, C e D quatro pontos distintos de uma recta, nesta ordem. As circunferências com diâmetros AC e BD intersectam-se em dois pontos distintos: X e Y. A recta XY intersecta BC em Z. Seja P um ponto de XY distinto de Z. A recta CP intersecta a circunferência com diâmetro AC em C e M, e a recta BP intersecta a circunferência com diâmetro BD em B e N. Prova que as rectas AM, DN e XY são concorrentes.

112. **OIAM 1997/6**. Seja $\mathcal{P} = \{P_1, P_2, \ldots P_{1997}\}$ um conjunto com 1997 pontos no interior de um círculo de raio 1, sendo P_1 o centro do círculo. Para cada $k = 1, \ldots, 1997$, seja x_k a distância de P_k ao ponto de $\mathcal{P}$ mais próximo de P_k. Mostra que $x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_{1997}^2 \leq 9\,.$

113. **OIM 1998/2**. Numa competição há a participantes e b juízes, sendo b um inteiro positivo e ímpar. Cada juíz dá um parecer positivo ou negativo sobre cada participante. Suponhamos que k é um número tal que, para quaisquer dois juízes, os seus pareceres coincidem, no máximo, para k participantes. Prova que $k/a \geq (b-1)/(2b)\,.$

114. **OIAM 1999/5**. Seja ABC um triângulo acutângulo, O o seu circuncentro e AD, BE, CF as suas alturas. Seja $\mathcal{C}$ a circunferência circunscrita ao triângulo ABC. A recta EF intersecta $\mathcal{C}$ em P e em Q. Mostra que:
(a) OA é perpendicular a PQ;
(b) se M é o ponto médio de BC, então $AP^2 = 2AD\,OM$.

115. **OIM 2000/4**. Distribuem-se 100 cartas numeradas de 1 a 100 em 3 caixas diferentes. De quantas maneiras pode isto ser feito de forma a que, ao escolhermos duas caixas e ao retirarmos de cada uma delas uma carta, então o conhecimento da soma das duas cartas é suficente para identificar a terceira caixa?

116. **OIM 2003/6**. Mostra que, para qualquer primo p, existe um primo q tal que $n^p - p$ não é divisível por q para qualquer inteiro positivo n.

117. **OIAM 2004/2**. Considera uma circunferência $\mathcal{C}$ de centro O e raio r e um ponto A distinto de O. Para cada ponto M de $\mathcal{C}$, seja N o ponto de $\mathcal{C}$ que lhe é diametralmente oposto. Determina o lugar geométrico dos centros das circunferências que passam em A, M e N ao variar M.

118. Seja D o pé da bissectriz interior do ângulo em A no triângulo ABC. A recta que une os centros das circunferências inscritas em ABD e em ACD intersecta o lado AB em M e o lado AC em N. Mostra que os segmentos BN, CM e AD são concorrentes.

119. (a) Calcula, em função de n, o número dos ternos de conjuntos, (A, B, C), que satisfazem $\emptyset \subseteq A \subsetneqq B \subsetneqq C \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}$.

(b) Sejam $a_1, \ldots, a_8$ oito números reais não todos nulos. Seja $c_j = a_1^j + \cdots + a_8^j$, para $j = 1, 2, 3, \ldots$. Supõe que uma infinidade dos c_j são zeros. Determina os índices, j, para os quais $c_j = 0$.

120. Sejam a, b, c os comprimentos dos lados de um triângulo ABC.
Mostra que $\dfrac{3}{5} \leq \dfrac{a}{a+2b+2c} + \dfrac{b}{2a+b+2c} + \dfrac{c}{2a+2b+c} < 1$.

121. Dois jogadores, alternadamente, retiram pedras de um conjunto de 2000 pedras, de acordo com as seguintes regras:

(a) Em cada jogada, cada jogador, pode retirar $1, 2, 3, 4$ ou 5 pedras.

(b) Em cada jogada, um jogador não pode retirar o mesmo número de pedras que o seu adversário retirou na jogada anterior.

O jogador que, na sua vez, não puder jogar de maneira válida, perde.
Determina que jogador tem uma estratégia que lhe garanta a vitória e encontra essa estratégia.

122. Define os seguintes conceitos por extenso, apresentando uma forma descritiva (ou “em compreensão”) para eles:

a) intersecção de conjuntos A, B;

b) intersecção de família de conjuntos $(A_i)_{i\in I}$;

c) pergunta i,ii com a palavra “união” no lugar de “intersecção”;

d) diferença simétrica de conjuntos A, B;

e) produto cartesiano dos conjuntos A, B.

123. Considera os conjuntos $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$, $B = \{1, 4, 7, 10\}$ e $C = \{-5, -3, -1, 1, 3, 5\}$, como sendo subconjuntos do universo $\Omega = [-5, 5] \cap \mathbb{Z}$. Calcula $(A \cap B) \times C^c$.

124. Decide, com prova ou contra-exemplo, para conjuntos A, B, C quaisquer, o valor de verdade das afirmações seguintes: a) $(A\Delta B)\Delta C = A\Delta(B\Delta C)$; b) $(A \times B) \cap (A' \times B') = (A \cap A') \times (B \cap B')$.

125. a) Enuncia uma versão do princípio da indução matemática. b) Prova por indução que $\left|2^{\{1,2,\ldots,n\}}\right| = 2^n$.

126. Sejam $A_1, \ldots, A_k$ subconjuntos de um universo finito Ω. Conjectura e demonstra uma descrição “compacta” do conjunto $A_1\Delta A_2\Delta\cdots\Delta A_k$.

127. Define função inversa de uma função real de variável real injectiva, f.

128. Define função exponencial e logarítmo.

129. Identifica o lugar geométrico dos pontos, $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, que verificam a equação $x^2 + y^2 = 1$.

130. Completa a frase:
– As funções de expressão analítica, $f(x) = (a^x + a^{-x})/2$ *e* $g(x) = (a^x - a^{-x})/2$, $a \in \mathbb{R}^+$ *designam-se por* ______________________*, e verificam a equação quadrática* ______________________________.

131. Resolve o sistema de equações quadráticas em $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ $x + xy + y = 2 + 3\sqrt{2}\,,\ \ x^2 + y^2 = 6\,.$

132. Indica o valor lógico das seguintes afirmações:

   a) Conhecendo apenas um lado de um triângulo plano, o ângulo oposto a este lado e um segundo ângulo é possível determina as restantes medidas do triângulo.

   b) Todos os triângulos planos que tenham um lado igual a 3, um ângulo igual a $30°$ e outro ângulo igual a $45°$ são congruentes.

   c) A soma dos ângulos de triângulo esférico é maior do que $180°$.

   d) Os três ângulos de um triângulo esférico equilátero medem $60°$.

133. Quatro círculos de raio 2 estão dispostos num plano de forma a que os seus centros formem um quadrado de lado 2. Quanto mede a área da região comum aos quatro círculos?

134. Deduz o Teorma de Pitágoras para um triângulo esférico, isto é, relaciona os três lados a, b e c de um triângulo cujo ângulo C seja recto.

135. Mostra, partindo de "primeiros princípios" e citando as definições necessárias, que:
   – Se $a|b_1\,,\ a|b_2\,,\ \ldots\,,\ a|b_n$ então $a|x_1b_1 + x_2b_2 + \ldots + x_nb_n$ quaisquer que sejam os inteiros $x_1, \ldots, x_n$.

136. a) Enuncia o teorema da divisão com resto.

   b) Dados $a = -700$ e $b = 234$, escreve $a = qb + r$ com q, r cumprindo as exigências do teorema.

   c) Supõe $b > 0$ como inteiro fixo. Deixa a percorrer o conjunto dos números inteiros positivos. Então q e r, definidas pelo teorema, são funções de a, $q = q(a)$ e $r = r(a)$. O que podes dizer sobre q e r enquanto funções?

137. Calcula o máximo divisor comum, g, de 1819 e 3587, e determina $x, y \in \mathbb{Z}$ tais que $g = 1819x + 3587y$ (ou explica como os podes determinar).

138. Determina o número de algarismos 0 finais consecutivos na representação decimal de $1000!$.

139. Sejam $r_1, \ldots, r_m \in \mathbb{Q}^+$ tais que $r_1 + \cdots + r_m = 1$. Definimos a função, f, de domínio $\mathbb{N}$ e contra-domínio $\mathbb{N}$, com expressão analítica $f(n) = n - \sum_{k=1}^{m} [r_k n]$, $n \in \mathbb{N}$. Determina o mínimo e o máximo de f em $\mathbb{N}$.

140. Considera a função, g, de domínio $\mathbb{N}$ e contra-domínio $\mathbb{N}$, definida por: $g(0) = 0$ e $g(n) = n - g(g(n-1))$, $n \in \mathbb{Z}^+$.

   a) Mostra que $g(n+1) - g(n) = 0$ ou 1 , $n \in \mathbb{N}$.

   b) Mostra que não existe $k \in \mathbb{Z}^+$ tal que $g(k-1) = g(k) = g(k+1)$.

   c) Determina uma expressão analítica para a função g .

141. Na resolução dos seguintes problemas não utiliza o conceito de número primo.

a) Mostra que se mdc $(a,m) = \text{mdc}\,(b,m) = 1$, então mdc $(ab,m) = 1$.

b) Mostra que para todos os $n \in \mathbb{Z}$ tem-se $4 \not| \, n^2 + 2$.

c) Mostra que $\{n^2 : n \in \mathbb{Z}\} \subsetneqq 3\mathbb{Z} \cup 3\mathbb{Z} + 1$.

d) Sejam $b \in \mathbb{Z}, g \in \mathbb{Z}^+$. Mostra que o sistema de equações mdc $(x,y) = g \;\; , \quad xy = b$ admite uma solução se, e somente se, $g^2 | b$.

142. Dá significado preciso à seguinte afirmação e demonstra-a: *Existem intervalos arbitrariamente grandes em* $\mathbb{Z}^+$ *que não contêm números primos.*

143. Dado um hexágono regular com área 4, constrói-se um novo hexágono ligando os pontos médios consecutivos do hexágono original. Iterando este processo quando é obténs um hexágono com área inferior a 1?

144. Num cubo é inscrita um esfera e dentro desta esfera é inscrito outro cubo. Qual é a razão entre as superfícies dos dois cubos?

145. Relativamente a um octaedro regular de lado L, determina: a) o raio da esfera inscrita; b) o seu volume.

146. Decide com prova ou contra-exemplo a seguinte afirmação: *Se* a, b *são inteiros positivos, então* $a | b^2 | a^3 | b^4 | \cdots$ *implica* $a = b$.

147. Sejam $a, m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, $d = \text{mdc}\,(a,m)$ e $m' = m/d$. Mostra:

a) $ax \equiv_m b$ tem uma solução se e somente se $d | b$.

b) Se x_0 é uma solução, então toda a solução é congruente módulo m a uma das soluções $\{x_0 + jm'\}_{j=1}^{d-1}$.

148. a) Mostra que a equação $3x^2 + 2 = y^2$ não tem solução em inteiros.

b) Mostra que se p primo, e $a, b \in \mathbb{Z}$, então $(a+b)^p \equiv_p a^p + b^p$.

149. A demonstração de Euclides (por nós apresentada) da existência de um número infinito de números primos, contém um argumento que pode ser utilizado para dar uma estimativa "crua" da função $\pi(x) := \#\{\text{primos} \leq x\}$. Com efeito, demonstra que para $n \geq 3$, $e^{n-1} \geq 2^n$, e utiliza isto para mostrar que $\pi(x) \geq \ln(\ln x)$; sendo e a base para o logarítmo natural $\ln(\,.\,)$, isto é $e^{\ln x} = x$. (**Nota**: um famoso teorema diz que $\lim_{x \to +\infty} \pi(x) \ln x / x = 1$.)

150. Sejam x_1, x_2, x_3 as soluções da equação $x^3 + px + q = 0$. Determina a equação cujas soluções são $1/x_1, 1/x_2, 1/x_3$.

151. Determina para que inteiros a, n o sistema de equações $x + y + z = 1, \;\; xy + yz + zx = a, \;\; xyz = 2^n$, tem soluções inteiras.

152. Considera o sistema de equações: $x - y = 2, \;\; (x - 2/a)(y - 2/a) = a^2 - 1$.

a) Determina os pares ordenados de pontos do plano $\mathbb{R}^2$ que verificam o sistema dado.

b) Determina os valores do parâmetro real a para os quais a solução é constituída por pares de números reais não-negativos.

c) Determina para esses valores de a o mínimo de $x+y$.

153. É bem sabido que um inteiro n com representação decimal $n_k n_{k-1} \ldots n_0$ é divisível por 2 se, e somente se, $2|n_0$. Vários outros critérios deste tipo são conhecidos para leitores atentos dos exercícios dos Textos do Delfos. Menciona estes, e prova os mais interessantes.

154. Caso o sistema de congruências lineares $x \equiv 3 \mod 7$, $x \equiv 1 \mod 11$, $x \equiv 4 \mod 6$, admita uma solução determine as soluções negativa e positiva de menor módulo; caso contrário diz porque não tem solução.

155. Demonstra que para inteiros $a, b, n \geq 2$ sempre se tem $a^n - b^n \nmid a^n + b^n$.

156. Determina todos os inteiros de três dígitos que divididos por 11 dão um inteiro igual à soma dos quadrados dos dígitos do inteiro original.

157. Sejam H o ortocentro e O o circuncentro de um triângulo acutângulo $[ABC]$. A mediatriz de $[AH]$ intersecta $[AB]$ em P e intersecta $[AC]$ em Q. Prova que $\measuredangle AOP = \measuredangle AOQ$.

158. Sejam a e b dois inteiros positivos de três dígitos e $a*b$ o inteiro de seis dígitos que resulta de escrever b a seguir a a. Determina a e b tais que $a,\ b,\ b-a,\ a*b,$ e $a*b/b$, são todos quadrados perfeitos.

159. a) Desenvolve $57/17$ em fracção contínua.

b) Desenvolve $\sqrt{3}$ em fracção contínua.

c) Determina a melhor aproximação racional a/b a $\sqrt{3}$ com denominador $b \leq 41$.

d) Mostra que para esta aproximação se tem $|\sqrt{3} - a/b| \leq 0.002$.

160. Sejam x, y dois números reais positivos. Mostra que:
a) $x + \dfrac{1}{x} \geq 2$. b) Se $x + y = 2a$ então xy atinge o seu valor máximo quando $x = y = a$.

161. Mostra que quaisquer dois termos da sucessão $2+1,\ 2^2+1,\ 2^4+1,\ \ldots,\ 2^{2^n}+1,\ \ldots$, são primos entre si.

162. Um real $\xi \notin \mathbb{Q}$ diz-se uma *irracionalidade quadrática*, se for raíz duma equação algébrica $ax^2+bx+c=0$ com $a, b, c \in \mathbb{Q}$. Sejam $m, n, o, p \in \mathbb{Q}$. Mostra que, se ξ for uma irracionalidade quadrática, então $\dfrac{m\xi + n}{o\xi + p}$ é também uma irracionalidade quadrática.

163. Demonstra que existem infinitos inteiros a tal que cada um dos inteiros $n^4 + a$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ é número composto.

164. Seja $\tau(n)$ o número dos divisores positivos do inteiro $n \geq 1$. Mostra que $\tau(n) \leq 2\sqrt{n}$.

165. Mostra que para cada inteiro n existe um inteiro a tal que cada um dos inteiros $a+1, a+2, \ldots, a+n$ é divisível por algum quadrado perfeito $\neq 1$.

166. Seja $[ABC]$ um triângulo com $\overline{AB} < \overline{AC}$ e denote-se por I o seu incentro. Sejam M o ponto médio de $[AC]$ e N o ponto médio do arco $A\overset{\frown}{B}C$ do circuncírculo de $[ABC]$. Mostra que $I\hat{M}A = I\hat{N}B$.

167. Considera a sucessão de funções $\{f_n\}$ definida por $f_1(x) = x$, $f_2(x) = x^3$, $f_{n+1}(x) = \dfrac{f_n^3(x) - f_{n-1}(x)}{1 + f_n(x)f_{n-1}(x)}$, $n = 2, 3, \ldots$. Mostra que a sucessão $\{f_n\}$ é constituída por polinómios.

168. Sejam $a_1, \ldots, a_n; b_1, \ldots, b_n$ inteiros e $k \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$. Mostra que o sistema de desigualdades
$$\mathrm{mdc}(a_1 + x_1, a_2 + x_2, \ldots, a_n + x_n) \geq k\,, \quad \mathrm{mdc}(b_1 + x_1, b_2 + x_2, \ldots, b_n + x_n) \geq k\,,$$
admite uma solução $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{Z}^n$.
Aqui $\mathrm{mdc}(u_1, \ldots, u_n)$ significa o máximo divisor comum dos inteiros $u_1, \ldots, u_n$.

169. Quantas palavras de cinco letras, todas contidas em $\{R, A, Q, U, E, L\}$ existem que começam com R e tem exactamente duas letras iguais? (exemplos são RRAQE, RAQELE)

170. Demonstra, preferencialmente de forma combinatória, a identidade $\displaystyle\sum_{j=0}^{n} j\binom{n}{j} = n2^{n-1}$.

171. Considera dois n-uplos de números reais positivos, (x_j) e (d_j) verificando $d_1 + \cdots + d_n = 1$. Para funções convexas, f, é válida a seguinte desigualdade, $f\,(d_1x_1 + \cdots + d_nx_n) \leq d_1f(x_1) + \cdots + d_nf(x_n)$.

   a) Identifica a desigualdade anterior.

   b) Mostra que a função $f(x) = 1/(1 + x)$ é convexa em $[0, +\infty[$.

   c) Considera os n números reais positivos $x_1, \ldots, x_n$ e $r, s \in \mathbb{R}^+$ com $0 < r \leq s$. Mostra que $\mathrm{M}_r(x_1, \ldots, x_n) \leq \mathrm{M}_s(x_1, \ldots, x_n)$.

172. Seja $\Omega = \{1, 2, \ldots, n\}$. Uma *anticadeia* $\mathcal{A}$ em Ω é uma família de subconjuntos de Ω, tais que para $A, B \in \mathcal{A}$, $A \neq B$ se tem $A \not\subseteq B$ e $A \not\supseteq B$. Mostra que $\mathcal{A}$ não contém mais que $\binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$ conjuntos, mas que anticadeias com este número de conjuntos existem.

173. Seja $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$. Mostra que a família de todos os n-uplos de 0's e 1's pode ser arranjada numa lista de comprimento 2^n de tal maneira que cada n-uplo difere do seu sucessor em apenas uma posição. Por exemplo, para $n = 4$, os 4-uplos 0110 e 0010 diferem apenas na segunda posição.

174. Prova que, dada uma sucessão infinita de pares de inteiros positivos (n_1, m_1), (n_2, m_2), …, existe uma subsucessão $\{(n_{i_\nu}, m_{i_\nu})\}_{\nu=1}^{\infty}$ tal que $n_{i_1} \leq n_{i_2} \leq n_{i_3} \leq \cdots$ e $m_{i_1} \leq m_{i_2} \leq m_{i_3} \leq \cdots$

175. Mostra que $2222^{5555} + 5555^{2222}$ é divisível por 7.

176. Mostra que, a equação $m^5 + 3m^4n - 5m^3n^2 - 15m^2n^3 + 4mn^4 + 12n^5 = 33$, não tem solução em $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

177. Seja A uma matriz $n \times n$ de entradas não negativas, e α, β reais tais que a soma das duas maiores entradas de cada fila seja igual a α, e a soma das duas maiores entradas de cada coluna seja igual a β. Mostra que $\alpha = \beta$.

Nota: a prova deve convencer também no caso de que várias das entradas da matriz sejam iguais.

178. Seja $n > 2$. Mostra que a soma dos naturais menores que n e primos relativos a n é $n\phi(n)$, sendo ϕ a função de ϕ de Euler.

179. a) Prova que todo o número positivo racional pode ser escrito na forma $\frac{(a^3+b^3)}{(c^3+d^3)}$ para alguns a, b, c, d inteiros. (Sugestão: Observa os valores de $(m+n)^3$ e $(m-2n)^3$.)

   b) Prova que todo o número positivo racional pode ser escrito na forma $\frac{(a^3+b^3)}{(c^3+d^3)}$ para alguns a, b, c, d inteiros positivos.

180. Para cada inteiro positivo a, obtemos $d(a)$ procedendo do seguinte modo:

   a) movemos o último dígito de a para a primeira posição e obtemos $b(a)$;

   b) tomamos o quadrado de $b(a)$ e obtemos um novo número $c(a)$;

   c) movemos o primeiro dígito de $c(a)$ para a última posição e obtemos $d(a)$.

   Por exemplo, para $a = 2003$, temos $b(2003) = 3200$, $c(2003) = 10240000$ e $d(2003) = 02400001 = 2400001$.

   Determina todos os inteiros positivos a tais que $d(a) = a^2$.

181. Mostra que existem cinco funções polinomiais $p_i : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $i = 1, \ldots, 5$ de graus ≤ 3, tais que para todo o $k \in \mathbb{Z}$, $(2k+1)^3 = p_1(k) + p_2(k) + p_3(k) + p_4(k) + p_5(k)$, e onde cada polinómio p_i satisfaz $|p_i(k)| < (2k+1)^3$ para todo o $k \in \mathbb{Z}_{\geq 3}$.

182. a) Quais os restos quadráticos módulo 11?

   b) Seja p um primo ímpar. Mostra que o símbolo de Legendre satisfaz as seguintes propriedades:
   i. $\left(\frac{ab}{p}\right) = \left(\frac{a}{p}\right)\left(\frac{b}{p}\right)$ ii. $a \equiv b \bmod p \Rightarrow \left(\frac{a}{p}\right) = \left(\frac{b}{p}\right)$ iii. $\left(\frac{1}{p}\right) = 1$, $\left(\frac{-1}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}}$.

   c) Determina $\left(\frac{-21}{61}\right)$.

183. Dados $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$, mostra que $a_1a_2^4 + a_2a_3^4 + \cdots + a_na_1^4 \geq a_2a_1^4 + a_3a_2^4 + \cdots + a_1a_n^4$.

184. Seja $n(r)$ o número de pontos de coordenadas inteiras sobre a circunferência de raio $r > 1$ no plano cartesiano. Mostra que $n(r) < 6\sqrt[3]{\pi r^2}$.

185. Sejam $x, y, z \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ tais que $1993 = x^2 + y^2 + z^2$. Decide com prova se $x + y + z$ pode ser quadrado perfeito.

186. Sejam m, n inteiro positivos e seja $\mathcal{F}$ a família dos n-uplos $(A_1, \ldots, A_n)$ com cada $A_i \subseteq \{1, 2, \ldots, m\}$, $i = 1, \ldots, n$. Encontra uma expressão simples para o número $\displaystyle\sum_{\mathcal{F}} |A_1 \cup A_2 \cdots \cup A_n|$.

187. Seja $(a_j)_{j=0}^{n+1}$ uma sucessão finita de números reais, tal que
   i. $a_0 = a_{n+1} = 0$, e ii. $a_{k-1} - 2a_k + a_{k+1} \in]-1, +1[$ para $k = 1, \ldots, n$.
   Então $|a_k| \leq 1/2\, k\,(n-k+1)$.

188. Sejam m, n inteiros não-negativos. Mostra que $\dfrac{(m+n)!}{m!\,n!}$ é um inteiro.

189. Os lados de um triângulo tem comprimentos $\sqrt{13}, \sqrt{74}, \sqrt{85}$. Qual a área do triângulo?

190. Encontra todos os inteiros n tais que $(n-2)(n-3)$ é divisível por $n-6$.

191. Sabe-se que para quaisquer reais x, y se tem
$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$ e $\sin(x+y) = \cos x \sin y + \cos y \sin x$.
Deduz daí fórmulas para $\cos(2x), \cos(3x)$ e $\sin(2x), \sin(3x)$.

192. a) Mostra: Se a, b, c são lados de um triângulo, então $\sqrt{a}, \sqrt{b}, \sqrt{c}$ também o são.
b) Mostra: A implicação recíproca de a) é verdadeira se e só se $\sqrt{a}, \sqrt{b}, \sqrt{c}$ são medidas dos lados de um triângulo acutângulo.

193. Encontra um número de três dígitos com as propriedades seguintes:
a) O número é divisível por 9 e por 11.
b) Se permutarmos o primeiro e o último número obtemos dois nonos do número original.

194. Ao famoso matemático Euler (1707-1783) deve-se o problema seguinte. Alguém comprou 100 animais por 100 táleres (antiga moeda alemã). Um porco custa três táleres e meio, uma cabra um táler e um terço. Uma ovelha um meio táler. Quantos animais de cada espécie comprou?

195. Sejam $x_1, \ldots, x_n$ números reais positivas de soma menor do que, ou igual a 3, e soma de quadrados maior ou igual a 1. Mostra que então existem i, j, k distintos tais que $x_i + x_j + x_k \geq 1$.

196. Considera um triângulo equilátero, e um número inteiro n. Divide cada um dos lados em n partes iguais. Liga os pontos de divisão assim obtidos por segmentos paralelos aos lados. Junto com os lados obtens assim $3n$ linhas (essencialmente coordenadas trilineares ou baricêntricas). Um conjunto de pontos distribuídos sobre as intersecções destes segmentos diz-se *independente* se quaisquer dois dos seus pontos não estiverem sobre um mesmo segmento.

Mostra que a cardinalidade máxima de um conjunto independente é $\lfloor \frac{2n}{3} \rfloor$.

197. Determina todas as soluções inteiras da equação $x^4 + y^4 + z^4 - 2x^2y^2 - 2x^2z^2 - 2y^2z^2 = 24$.

198. Sejam $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$, $B = \{b_1, b_2, b_3\}$, $C = \{c_1, c_2, c_3, c_4\}$. Considera as relações binárias $R_1 \subseteq A \times B$, $R_2 \subseteq B \times C$, definidas por
$R_1 = \{(a_1, b_2), (a_1, b_3), (a_2, b_3), (a_2, b_2), (a_4, b_1)\}$, e $R_2 = \{(b_1, c_3), (b_2, c_2), (b_3, c_4)\}$,
respectivamente.
a) Indica a relação binária $R_2 \circ R_1$.
b) Quais das relações R_1, R_2 (se algumas) são aplicações?

199. Seja $f : A \to B$ uma aplicação. Mostra:
a) Para todo o $A' \subseteq A$ tem-se $A' \subseteq f^{-1}(f(A'))$.
b) Para todo o $B' \subseteq B$ tem-se $f(f^{-1}(B')) \subseteq B'$
c) Para todo o $A' \subseteq A$ tem-se $A' = f^{-1}(f(A'))$ se e somente se f for injectivo.
d) Em que circunstância podemos substituir em (b), deixando todo resto igual, o símbolo "$\subseteq$" por "$=$"?

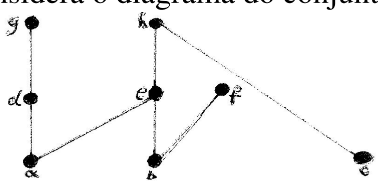
200. Seja Ω um conjunto de dez inteiros positivos distintos de dois digitos, e 2^Ω a família de todos os subconjuntos de Ω. Considera a aplicação $2^\Omega \ni X \mapsto s(X) := \sum_{x\in X} x \in \mathbb{Z}$.

a) Dá uma lista de alguns dos elementos de 2^Ω, para o caso $\Omega = \{12, 13, \ldots, 22\}$. Quantos elementos tem a lista completa?
b) Quais os valores de $s(\{12, 14, 15\})$ e de $s(\Omega)$?
c) Para determinados Ω do tipo do enunciado a aplicação s pode ser injectiva?
d) Dado um conjunto Ω como no enunciado, existem necessariamente dois subconjuntos disjuntos e não vazios cujos elementos tem a mesma soma?

201. Mostra que se 9 pessoas estão sentadas numa fila de 12 cadeiras, então há 3 cadeiras consecutivas ocupadas.

202. Dados 2006 inteiros, mostra que existem dois cuja diferença, ou cuja soma, é um múltiplo de 4009.

203. a) Considera o diagrama do conjunto parcialmente ordenado P.



Identifica os conjuntos $\min P$ e $\max P$, e indica cadeias e anticadeias de cardinalidades máximas.

b) Considera o conjunto definido pelos elementos $(0,4),\ (1,6),\ (2,2),\ (3,6),\ (3,8),\ (5,2),\ (5,4), (6,6),$ $(6,9),\ (7,4),\ (9,3),\ (9,6),\ (9,9),\ (10,6)$, e munido da ordem produto da ordem natural dos inteiros. Desenha um diagrama deste conjunto parcialmente ordenado. Uma maneira expedita para o obter é identificar os mínimos, traçá-los, depois identificar os mínimos da ordem que resta, traça-los, etc.

204. a) Mostra que uma ordem parcial com pelo menos mn elementos tem uma cadeia de m elementos ou uma anticadeia de n elementos.

b) Deduz que toda a sucessão de mn inteiros distintos tem uma subsucessão crescente de m elementos ou uma subsucessão decrescente de n elementos.

205. Considera a família de todas as aplicações afins e *não* constantes de $\mathbb{R}$ para $\mathbb{R}$.

a) Mostra que esta família define relativamente à composição de aplicações um grupo. Preenche em particular os espaços deixados em branco das afirmações seguintes (com notação da tua escolha):
i) O elemento inverso da aplicação afim $f(x) =$ ________ é a aplicação $f^{-1}(x) =$ ________ .
ii) O elemento neutro da família é a aplicação ________ .

b) Seja G um subgrupo arbitrário desta família tal que para cada $g \in G$ o conjunto $\mathrm{Fix}(g) = \{r \in \mathbb{R} : g(r) = r\}$ é não-vazio.
Preenche: Se $g(x) =$ ________ então $\mathrm{Fix}(g) = \{$________$\}$.
Mostra que o conjunto $\bigcap_{g\in G} \mathrm{Fix}(g)$ é não-vazio.

206. Considera o conjunto $\mathbb{M}$ de todos os pares ordenados de números naturais (m, n), com $m \geq n$.

a) Constrói uma função bijectiva $h : \mathbb{N} \to \mathbb{M}$.

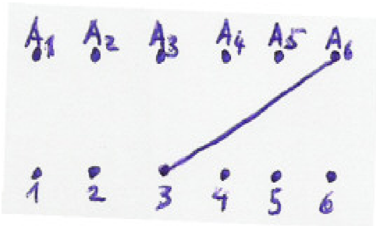
b) Calcula $h(500)$ e determina a expressão analítica da função h.

207. a) Calcula todas as raízes racionais do polinómio $x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 3x - \frac{3}{2}$.

b) Recorda que para quaisquer reais x, y se tem $\sin(x + y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y$ e $\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x$. Mostra que $\sin(10^{\text{o}}) \notin \mathbb{Q}$.

208. a) Enuncia o teorema de Dilworth.

b) Considera os subconjuntos $A_1 = \{1, 3\}$, $A_2 = \{1, 2, 4\}$, $A_3 = \{3, 4, 5\}$, $A_4 = \{2, 5\}$, $A_5 = \{1, 6\}$, $A_6 = \{3, 4\}$ de $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Completa o diagrama



introduzindo uma aresta ligando i a A_j se e só se $i \in A_j$.

c) Observa que um tal diagrama pode ser visto como diagrama de uma ordem parcial. Prova o seguinte teorema, chamado **teorema do casamento**:
Dada uma família de subconjuntos $A_1, A_2, \ldots, A_n$ *do conjunto* $\Omega = \{1, 2, \ldots, n\}$ *tal que para cada* $k = 1, 2, \ldots, n$, *a união de quaisquer* k *dos conjuntos* A_i *tem pelo menos* k *elementos, então existe uma permutação* $\sigma \in S_n$ *tal que* $1 \in A_{\sigma(1)}, 2 \in A_{\sigma(2)}, \ldots, n \in A_{\sigma(n)}$.

209. a) Na família de pares de inteiros introduzimos uma multiplicação

$$* : (\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}) \to (\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}) \quad \text{por} \quad (a, b) * (a', b') = (aa' - bb', ab' + a'b)$$

Demonstra que esta multiplicação é associativa.

b) Usando os axiomas de Peano demonstra que a adição em $\mathbb{N}$ é comutativa.

c) Seja $G = (G, \cdot)$ um grupo com elemento neutro e, tal que para cada $a \in G$ se tem $a \cdot a = e$. Mostra que G é comutativo.

210. Seja G um subgrupo do grupo das permutações sobre $\Omega = \{1, \ldots, n\}$. Considera para cada $i \in \Omega$, os conjuntos $\mathrm{Stab}(i) = \{g \in G : g(i) = i\}$ (chamado *estabilizador* de i) e $G(i) = \{g(i) : g \in G\}$ (chamado *órbita* de i sobre G.)

a) Demonstra que $\mathrm{Stab}(i)$ é um subgrupo de G .
b) Demonstra que $|\mathrm{Stab}(i)| \cdot |G(i)| = |G|$.

211. Quantos números com 3 algarismos são divisíveis por 7 ou por 11?

212. Seja $p_n(k)$ o número de permutações de n elementos com exactamente k pontos fixos. Mostra que

$$\sum_{k=0}^{n} k p_n(k) = n! \,.$$

213. Mostra que o produto de quatro inteiros consecutivos nunca de desvia de um quadrado perfeito por mais de uma unidade. Pode dizer-se alguma coisa ainda mais forte (que implica a afirmação de forma imediata)?

214. Mostra que para todo o inteiro a, os inteiros $(a^3 + 2a)$ e $(a^4 + 3a^2 + 1)$ têm máximo divisor comum igual a 1.

215. A equação $x^3 - y^3 = 2005(x^2 - y^2)$ não admite soluções inteiras, $x, y \in \{1, 2, \dots\}$, com $x \neq y$.

216. a) Determina a palavra cujos quadros de inserção e de registo são respectivamente

$$P = \begin{array}{lll} 4 & & \\ 3 & & \\ 2 & 4 & \\ 1 & 2 & 2 \end{array} \qquad \text{e} \qquad Q = \begin{array}{lll} 4 & & \\ 3 & & \\ 2 & 6 & \\ 1 & 5 & 7 \end{array} \quad .$$

b) Determina duas palavras distintas com o mesmo quadro de inserção P (definido em a)). O que concluis para os quadros de registo?

c) Determina duas palavras com o mesmo quadro de registo Q (definido em a)).

d) Encontra todas as palavras que têm como quadro de inserção

$$P = \begin{array}{lll} 3 & & \\ 2 & & \\ 1 & 1 & 2 \end{array} \quad .$$

e) Qual a relação entre o número de palavras que determinaste na alínea anterior e os quadros *standard* com formato $(3, , 1, 1)$?

217. Mostra que $5! = \Sigma_{|a|=5}(f_a)^2$, onde a soma é sobre todas as partições a com 5 caixas e f_a é o número de quadros standard com formato a.

218. Mostra que nenhum número inteiro positivo da forma $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ com inteiros x_1, x_2, x_3, tem resto 7 quando dividido por 8.

219. Euler (1707-1783) Mostra que existe uma identidade polinomial

$$(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2)(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + y_4^2) = (A_1^2 + A_2^2 + A_3^2 + A_4^2),$$

onde cada uma das expressões A_i tem a forma $x_1 y_{\sigma(1)} \pm x_2 y_{\sigma(2)} \pm x_3 y_{\sigma(3)} \pm x_4 y_{\sigma(4)}$, com uma certa permutação σ, e certos sinais $+$ ou $-$. (A permutação σ e os sinais $+$ ou $-$ dependem de i, $i = 1, 2, 3, 4$.)

220. Deduz do exercício anterior que, se todo o número primo pode ser escrito como soma de 4 quadrados, então todo o inteiro positivo é representável como soma de 4 quadrados.
Demonstra o seguinte:

a. O conjunto $S_1 = \{0, 1^2, 2^2, \dots, ((p-1)/2)^2\}$, não tem dois números que divididos por p tenham o mesmo resto. O mesmo é válido para o conjunto $S_2 = \{0^2 - 1, -2^2 - 1, \dots, -((p-1)/2)^2 - 1\}$.

b. Deduz de (a) que para cada primo ímpar p existe um inteiro $m < p$ tal que $mp - 1$ é soma de dois quadrados.

(Os dois últimos exercícios são passos importantes numa das demonstrações do teorema de Lagrange (1736-1813), dizendo que *todo o inteiro positivo é soma de quatro quadrados*.)

221. Averigua se existe alguma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x - f(y)) = f(x) + f(y) + f(x)f(y) + f(f(y))$.

222. Determina as funções $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que verificam $f(x\, f(y)) = f(x)^{f(y)} \,.\, f(f(y))$.

223. Prova que para todo o inteiro n, $n(n^2 - 1)(3n + 2)$ é divisível por 24.

224. Calcula o mdc $(341, 527)$.

225. Prova que $c|ab$ e $c \perp a$ implica $c|b$.
($c \perp a$ significa que o máximo divisor comum de c e a é 1.)

226. Considera um baralho de $2m$ cartas. Faça-se uma reordenação destas cartas da seguinte forma. As cartas nas posições $1, 2, 3, \ldots, m$ vão para as posições $2, 4, \ldots, 2m$ e as cartas nas posições $(m+1), (m+2), \ldots, 2m$ vão para as posições $1, 3, 5, \ldots, 2m-1$.
a. Dá condições para m que garanta que após um número finito destas reordenações as cartas voltem para a sua posição original.
b. Em particular, se tivermos 52 cartas mostra que existe um $n \leq 52$ tal que as cartas voltam após n destas reordenações à posição original.

227. Quantas palavras existem com 6 letras, usando apenas as letras A, B, C, D e aparecendo cada letra pelo mnos uma vez?

228. Quantas sequências de 2007 letras A, B ou C contêm um número ímpar de B's?

229. Mostra que dados dois quadrados, é possível dividi-los em pedaços por forma a obter um novo quadrado. Justifica que podes generalizar esta propriedade a um número qualquer $n \in \mathbb{N}$ de quadrados.

230. No triângulo $[ABC]$, seja D o ponto médio do lado $[BC]$. Sabendo que $\widehat{ACB} = 30^o$ e $\widehat{ADB} = 45^o$, determina $\widehat{ABC}$.

231. a. Desenvolve uma fórmula para a área de um triângulo com vértices nos pontos $(0,0), (a,b), (x,y)$ do plano.
(Existe uma fórmula que contém cada uma das letras a, b, x, y apenas uma vez, e nenhuma raíz, nem quadrados.)

b. Qual a área mínima de um triângulo não degenerado nos seguintes casos.
i. Os vértices são $(0,0), (15,7), (x,y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.
ii. Os vértices são $(0,0), (15,8), (x,y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.
iii. Os vértices são $(0,0), (15,9), (x,y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

232. Demonstra (sem uso do conceito do primo) que mmc $(a,b) \cdot$ mdc $(a,b) = |ab|$, sendo $a, b \in \mathbb{Z}^* = \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.

233. Considera a permutação $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots & m & m+1 & m+2 & \ldots & 2m \\ 2 & 4 & 6 & \ldots & 2m & 1 & 3 & \ldots & 2m-1 \end{pmatrix}$.
a. Mostra que π é dado por uma fórmula muito simples, ($\pi(j) = \ldots$) se esta for valorizada (i.e. calculada) num anel de restos $\mathbb{Z}_k$ adequado. Qual o k?

b. Deduz de (a) sem morosas considerações sobre movimentações de cartas, que após 52 (mas não menos) reordenações de cartas do tipo referido no teste da sessão anterior, as cartas do baralho voltam às suas posições originais.

c. Enuncia um teorema geral, contendo (b) como caso especial.

234. Seja $S = \{a + b\sqrt{2} \in \mathbb{R} : \ a, b \in \mathbb{Z}\}$. Determina as aplicações $f : S \to \mathbb{R}$, crescentes e que verificam
$$f(x+y) = f(x) + f(y), \text{ para todo o } x, y \in S.$$

235. a. Os planetas Venúsio, Terrão e Marta dum sistema distante giram em volta da estrela Girassolum ao longo de circunferências concêntricas e complanares, com velocidades constantes. Para completarem uma órbita precisam $3, 4, 5$ anos, respectivamente. A determinada altura estão colineares na ordem Girassolum-Venúsio-Terrão-Marta, ao longo de uma semi-recta g^+ de origem na estrela Girassolum. Daqui a quantos anos será que as ligações da Girassolum para Venúsio, Terrão, Marta farão ângulos com g^+ de $-120^o, 90^o$, 288^o , respectivamente?

b. Mais geralmente, supõe que um grupo de astrónomos sabe que planetas P_1, P_2, P_3, precisam de m_1, m_2, m_3 anos para completarem as sua órbitas que se dão em circunferências complanares percorridas com velocidades constantes. Eles também sabem que de momento as posições de P_1, P_2, P_3 relativamente a certa semi-recta g^+ com origem na estrela central são dadas pelos ângulos $\alpha_1, \alpha_2 \alpha_3$; mas eles querem saber quando as suas posições vão ser $\beta_1, \beta_2, \beta_3$.
Escreve uma receita que os astrónomos possam utilizar de forma mecânica para resolverem problemas deste género; e ilumina a receita com o exemplo a). Mais, diz em que circunstâncias podem esperar respostas exactas com esta tua receita.

236. Seja p primo. Mostra que para todos os inteiros x se tem $x^{p-1} - 1 \equiv (x-1)(x-2)\cdots(x-p+1) \bmod p$.

237. Num campeonato de Karting participam apenas três concorrentes, A, B e C. O campeonato é composto por várias provas e em cada prova o primeiro classificado ganha p_1 pontos, o segundo p_2 pontos e o terceiro p_3 pontos, com $p_1 > p_2 > p_3$ números inteiros positivos. O campeonato foi ganho pelo concorrente A com 22 pontos, enquanto B e C ficaram empatados com 9 pontos. O concorrente A não ganhou todas as corridas. Quantas corridas teve o campeonato? Mostra que não há outras soluções.

238. Num campeonato de Futebol, as n equipas participantes jogam todas entre si uma vez. Se uma equipa ganhar um jogo recebe $V \in \mathbb{R}$ pontos, com $V \geq 1$, se empatar recebe 1 ponto e se perder recebe 0 pontos.

Uma das equipas ganhou menos jogos do que todas as outras, mas obteve mais pontos. Para que valores de n e V é isto possível? Constrói um exemplo com $V = 1,25$.

239. Determina, com prova, a área máxima dum triângulo acutângulo para o qual o produto de quaisquer duas das suas alturas é menor ou igual a 1 .

240. Determina o menor inteiro m tal que existam inteiros q, n que satisfazem $2007 = q^2 + n$ e $0 \leq n < m\sqrt{q}$.

241. Mostra que para todo o natural n existe um natural k tal que todos os divisores, d, com $d \neq 1$ de $2^k - 3$ são maiores do que n .

242. Num quadrado 8×8, qual é o número mínimo de casas que é necessário pintar para que nos espaços em branco não se possa colocar um rectângulo 3×1 ?

243. Mostra que para todo o $n \in \mathbb{Z}^+$ e $x \in \mathbb{R}^+$ se tem: $(1 + x^{n+1})^n \leq (1 + x^n)^{n+1} \leq 2\,(1 + x^{n+1})^n$.

244. Sejam $a, b \in \mathbb{R}^+$, tais que $60^a = 3$ e $60^b = 5$. Determina o valor de $12^{(1-a-b)/(2(1-b))}$.

245. Sejam $x, y, z \in \mathbb{Z}^+$ tais que $1/x + 1/y = 1/z$ e $\mathrm{mdc}(x, z) = 1$. Mostra que $x + y$, $x - z$, $y - z$ são quadrados perfeitos. Dá um exemplo de um terno ordenado de números com esta propriedade.

246. Mostra que na sucessão de numeros reais, $\sin n$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ existem infinitos termos que são $\geq 1/\sqrt{2}$ e infinitos termos que são $\leq -1/\sqrt{2}$.

247. Num triângulo de lados $a = 3$ e $b = 5$ o ponto de intersecção L da bissectriz do ângulo A com o lado BC está compreendido no intervalo entre os pontos que estão respectivamente a .... e .... unidades de distância de B. Preenche as reticências com os melhores limites que consegues encontrar.

248. Seja $\mathcal{A} = \{A_1, \ldots, A_m\}$ uma família de m subconjuntos distintos de um conjunto $\Omega = \{1, \ldots, n\}$ tal que $A_i \cap A_j \neq \emptyset$ para todos os $i, j = 1, \ldots, m$. Então $m \leq 2^{n-1}$.

249. Mostra que o polinómio $M(x, y, z) = x^4y^2 + x^2y^4 + z^6 - 3x^2y^2z^2$ assume apenas valores não-negativos, mas não pode ser escrito como soma de quadrados de polinómios com coeficientes reais.

250. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função contínua e **R** a região do plano compreendida entre os gráficos de f e $f - 1$.
a. Mostra que se f é convexa, então **R** contém segmentos rectos de comprimento arbitrário;
b. Dá um exemplo mostrando que sem convexidade a propriedade na alínea anterior não precisa ser verdadeira.

251. Considera três semirectas não complanares a^+, b^+, c^+ com a mesma origem O. Seja P um ponto no interior do invólucro convexo (i.e., "região angular espacial") das semirectas. Sejam $A \in a^+, B \in b^+, C \in c^+$ os pontos de um plano por P que minimiza o volume do tetraedro $OABC$ em comparação com outros tais tetraedros definidos por planos por P. Expressa as distâncias $|OA|, |OB|, |OC|$ em termos das coordenadas de P relativamente a a^+, b^+, c^+ .

Nota: Se $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ são vectores de comprimento 1 fixados em O e orientados no sentido de a^+, b^+, c^+ então $P \doteq \overrightarrow{OP} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c}$ para certos $\alpha, \beta, \gamma > 0$ únicos. O terno (α, β, γ) constitui as coordenadas de P relativamente aos eixos a^+, b^+, c^+.

252. Considera os polinómios $f(x) = x^3 - 3x^2 + (1 + 2a)x - b$, $g(x) = x^3 - (2 + a)x^2 + (2a + b)x - c$, onde $a, b, c \in \mathbb{C}$. Supondo que toda a raíz de f também é raíz de g, quais são os polinómios g possíveis?

253. Seja $n(r)$ o número de pontos de coordenadas inteiras num círculo de raio $r > 1$. Mostra que $n(r) < 6\sqrt[3]{\pi r^2}$.

254. Sejam $A - L - B$ três pontos colineares, considerados por esta ordem. Qual o lugar geométrico dos pontos P com a propriedade que a bissectriz do ângulo $A\hat{P}B$ passa por L?

255. Dois alcoólicos, amigos, munidos de copos (vazios) de 50 e 30 centilitros querem partilhar o conteúdo duma garaffa de vodka de 80 centilitros. Por uma 'operação elementar' entendem esvaziar um dos recipientes (garrafa incluida), ou completamente encher um outro, de modo a pôr parte (ou tudo) do precioso líquido do primeiro no segundo. Será possível encher por uma série de operações elementares (em ausência de outros modos de medir só estas são permitidas) dois dos recipientes com exactamente 40 centilitros? Se sim, como?

256. Considera um quadrado $n \times n$ cujos quadradinhos 1×1 são todos brancos ou pretos. Para todo o quadradinho branco há de entre os quadradinhos na vertical ou na horizontal do mesmo pelo menos n pretos. Mostra que o quadrado tem pelo menos $n^2/2$ quadradinhos pretos.

257. Seja $n \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$, e $p^{(n)}(x,y) = p_0 x^n + p_1 x^{n-1} y + \cdots + p_{n-1} x y^{n-1} + p_n y^n$ um polinómio cujos coeficientes satisfazem $p_0 = 1$ e $p_i \binom{n-i}{j} + p_j \binom{n-j}{k} + p_k \binom{n-k}{i} = 0$, sempre que $i, j, k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ com $i+j+k = n$. Mostra que $p^{(n)}(x,y)$ é especificável por uma expressão algébrica com menos que 17 símbolos, todos tirados do 'alfabeto' $\{x, y, n, +, -, \cdot, (,), 0, 1, 2, 3\}$.

258. Seja n um inteiro positivo. Determina o conjunto dos inteiros que admitem a seguinte representação
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{a_k} \quad \text{onde } a_1 , \ldots , a_n \in \mathbb{Z}^+ .$$

259. Encontra todos os polinómios P de $\operatorname{gr} P \leq n$ com coeficientes reais tal que a desigualdade $P(x)P(1/x) \leq (P(1))^2$ se verifique.

260. Demonstra a desigualdade $\frac{1}{x_1} + \frac{x_1}{x_2} + \frac{x_1 x_2}{x_3} + \cdots + \frac{x_1 x_2 \cdots x_n}{x_{n+1}} \geq 4(1 - x_1 x_2 \cdots x_{n+1})$, para reais positivos $x_1, \ldots, x_{n+1}$.

261. Seja $n \in \mathbb{N}$. Determina $\sum_{k=1}^{n} \lfloor \sqrt{k} \rfloor$ em termos de n e $a = \lfloor \sqrt{n} \rfloor$.

262. Seja (a_n) uma sucessão de números reais tais que $a_1 = 1/2$ e $a_{n+1} = \frac{a_n^2}{a_n^2 - a_n + 1}$, para $n = 1, \ldots$ Mostra que, $a_1 + a_2 + \cdots + a_n < 1$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

263. Considera os conjuntos: $A = \{-3, -2, -7, 4, 5\}$, $B = \{6, -2, 4, 4, 3\}$, $C = \{5, -3, 4, 6, 10\}$, como subconjuntos do universo $\Omega = \{-10, -9, \ldots, 0, \ldots, 9, 10\}$.
Mostra por cálculo expícito que: i. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$; ii. $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$; iii. $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$.

264. Decide com prova ou contra-exemplo se para quaisquer três conjuntos A, B, C se tem
$$(A \triangle B) \times C = (A \times C) \triangle (B \times C) .$$

265. Escreve os conjuntos $A = \cup_{i=1}^{j} \cup_{j=i}^{5} \{(i,j)\}$ e $B = \cap_{i=1}^{j} \cup_{j=i}^{5} \{j\}$ como listas. Representa A no plano e mostra que descreve a relação binária "$\leq$" para o conjunto $\{1, 2, 3, 4, 5\}$.

266. a) Sejam A, B conjuntos finitos, e $f : A \to B$ uma aplicação. Quais os símbolos, "$\leq$" ou "$\geq$", deves introduzir no lugar indicado para que as afirmações seguintes se tornem verdadeiras? Justifica a resposta.
i. "Se f é injectiva, então $|A|$.....$|B|$"; ii. "Se f é sobrejectiva, então $|A|$.....$|B|$".

b) Mostra que a função $S_3 \ni \pi \mapsto 1 \cdot \pi(1) + 2 \cdot \pi(2) + 3 \cdot \pi(3) \in B$ está bem definida se $B = \{10, 11, 12, 13, 14\}$ ou para qualquer superconjunto deste conjunto.
Para este conjunto B, será a função dada sobrejectiva? e injectiva?

c) Mostra que em qualquer conjunto de 16 inteiros positivos de dois dígitos existem dois subconjuntos disjuntos de não mais que 5 elementos com igual soma.
(Um pouco mais de cálculo mostra que a afirmação é verdadeira para qualquer conjunto de mais que 13 inteiros.)
Se possível descreve a tua solução em linguagem das aplicações.

267. Uma *partição ordenada* de $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ de comprimento k é um k-uplo $(n_1, \ldots, n_k) \in \mathbb{Z}_{\geq 1}^k$ tal que $n_1 + n_2 + \cdots + n_k = n$. Seja $\mathcal{O}(n)$ a família de todas as partições ordenadas de n de comprimento ímpar, e $\mathcal{P}(n)$ a família de todas as partições ordenadas de n. Exemplos de $\mathcal{O}(8)$ são $(1, 3, 4), (2, 2, 2, 1, 1)$; exemplos de $\mathcal{P}(7)$ são $(6, 1)$, $(2, 4, 1)$, *etc*.

Mostra que existe uma aplicação bijectiva $\phi : \mathcal{O}(n) \to \mathcal{P}(n-1)$ tal que para todo o ℓ, o conjunto de todas as partições em $\mathcal{O}(n)$ que têm soma das entradas em posições ímpares igual a ℓ corresponde aos elementos em $\mathcal{P}(n-1)$ de comprimento $n - \ell - 1$.

268. Sejam A, B, C conjuntos finitos.
a) Demonstra que $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$.
b) Expressa de forma similar $|A \cup B \cup C|$ através das cardinalidades de intersecção dos conjuntos A, B, C, e prova a fórmula adivinhada.
c) Qual é a fracção dos naturais que não é nem divisível nem por 3, nem por 5, nem por 7?

269. Sejam $K \subseteq L \subseteq M$ grupos finitos. Mostra que o índice de K em L vezes o índice de L em M é o índice de K em M.

	e	g_1	g_2	g_3	g_4	g_5	g_6	g_7
e	e	g_1	g_2	g_3	g_4	g_5	g_6	g_7
g_1	g_1	e	g_6	g_7	g_5	g_4	g_2	g_3
g_2	g_2	g_3	e	g_1	g_6	g_7	g_4	g_5
g_3	g_3	g_2	g_4	g_5	g_7	g_6	e	g_1
g_4	g_4	g_5	g_3	g_2	e	g_1	g_7	g_6
g_5	g_5	g_4	g_7	g_6	g_1	e	g_3	g_2
g_6	g_6	g_7	g_1	e	g_2	g_3	g_5	g_4
g_7	g_7	g_6	g_5	g_4	g_3	g_2	g_1	e

270. Identifica na tabela do grupo D_4 acima, subgrupos N_1, N_2 de cardinalidades 2 e 4, respectivamente. Quais destes subgrupos são normais em D_4? Se $N_i \lhd D_4$ identifica o grupo D_4/N_i.

271. Considera um triângulo equilátero e introduz os pontos médios dos lados e o centro E. Designa os primeiros seis pontos no sentido do contrário ao dos ponteiros do relógio por A, B, D, F, C, G. Introduz a circunferência inscrita de centro E. Os três lados, três medianas, e a circunferência definem sete objectos unidimensionais.

A família dos sete 3-conjuntos definida pelos objectos unidimensionais é dada por $\{\{A, B, D\}, \{C, D, F\}, \{B, F, G\}, \ldots\}$.

Se permutarmos as letras, esta família, regra geral, também vai mudar. No entanto existem permutações não triviais que definem a mesma família de 3-conjuntos. Por exemplo: $\pi = \begin{pmatrix} A & B & D & F & C & G & E \\ A & F & E & D & G & C & B \end{pmatrix}$
Tais permutações chamaremos *válidas*.

a) Completa a lista dos 3-conjuntos acima iniciada, e escreve a lista correspondente para a permutação dada (para te convenceres que ela é *válida*).

b) Determina o número das permutações válidas. (Se possível usa a teoria dos grupos finitos.)

272. Seja f uma função real de variável real tal que: a) $f(0) = 1/2$; b) $f(x+y) = f(x)\,f(2-y) + f(y)\,f(2-x)$, $x, y \in \mathbb{R}$. Prova que f é constante.

273. Sejam $a_0, a_1, \ldots, a_n$ reais tais que para $k = 0, 1, \ldots, n$ se tem $\sum_{i=0}^{k} a_i < 0$. Mostra que o polinómio $f(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \cdots + a_n t^n$, não tem raízes no intervalo $[0, 1]$.

274. Mostra, indicando uma aplicação bijectiva entre eles, que os seguintes conjuntos têm os mesmos números de elementos:

a) O conjunto das árvores binárias com n folhas.

b) O conjunto das colocações de parênteses admissíveis de um produto de n elementos, $a_1 a_2 a_3 \cdots a_n$.
Por *exemplo*, considera que o produto $abcd$ tem as seguintes colocações de parênteses admissíveis:
$(((ab)c)d),\ ((ab)(cd)),\ (a(b(cd))),\ ((a(bc))d),\ (a(b(cd)))$.

c) O conjunto das sucessões de 0's e 1's de comprimento $2(n-1)$ com $(n-1)$ 0's e tais que cada segmento inicial da sucessão tem pelo menos tantos 0's como 1's.
Por *exemplo*, $010101,\ 010011,\ 000111,\ 001011,\ 001101$ são as sucessões de comprimento 6 desse género; mas 011001 *não* tem a propriedade pedida.

d) O conjunto dos monómios distintos do produto $x_1(x_1+x_2)(x_1+x_2+x_3)\cdots(x_1+x_2+\cdots+x_n)$.
Por *exemplo*, o polinómio $(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$ define o conjunto $\{x^2, xy, y^2\}$ de monómios distintos.

275. Seja $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ uma sucessão finita de reais não nulos. Diz-se que o índice m define uma *troca de sinal* se $a_{m-1}a_m < 0$. Para uma qualquer sucessão finita de números reais, diz-se que ela tem σ trocas de sinal se a sucessão após eliminação dos zeros tem σ trocas de sinal.
Por *exemplo*, a sucessão $1, 0, 0, 2, -1, 0, 3, -2, -3, 1$ tem $\sigma = 4$ trocas de sinal, pois $1, 2, -1, 3, -2, -3, 1$ tem 4 trocas de sinal.

a) Mostra que a sucessão $a_0, a_0+a_1, a_1+a_2, \ldots, a_{n-1}+a_n, a_n$ não tem mais trocas de sinal que a sucessão $a_0, \ldots, a_n$.

b) Mostra que a sucessão $s_0, \ldots, s_n$ definida por $s_j = \sum_{l=0}^{j} \binom{n}{l} a_l$ também não tem mais trocas de sinal que $a_0, a_1, \ldots, a_n$.

276. Funções reais de variável real.
a) Define o conceito da derivada e o associado conceito de limite.
b) Demonstra que a derivada da função $f(x) = x^k$ é $k\,x^{k-1}$.

277. Considera a função $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 1/q$ se $x = p/q$ racional irredutível com $0 < p < q$ e $f(x) = 0$ se x for irracional. Mostra que $\lim_{x\to a} f(x) = 0$ para qualquer $a \in]0,1[$.

278. Um jogo de formação de palavras sobre o alfabeto $\{\mathsf{M}, \mathsf{I}, \mathsf{U}\}$ tem as seguintes regras:
o) A palavra inicial é MI.
a) A uma palavra que termina com I, podemos acrescentar U.
b) De uma palavra Mx (x sendo uma palavra) podemos formar a nova palavra Mxx.
c) Uma cadeia III encontrada numa palavra pode ser substituida por U.
d) Uma cadeia UU encontrada numa palavra pode ser apagada.

Exemplos: As transformações MIUII $\to$ MIUIIIUII $\to$ MIUUUII $\to$ MIUII $\to$ MIUIIU são possíveis segundo as regras b),c),d),a), respectivamente.

Questão: Começando com MI podemos formar MU ?

279. Seja $c_0 = 1$ e c_n o número das árvores binárias com $n+1$ folhas. a) Verifica para $n = 0, 1, 2$, por construção directa das árvores possíveis, que $c_{n+1} = c_n c_0 + c_{n-1} c_1 + \cdots + c_0 c_n$.
b) Explica porque a fórmula enunciada em a), é válida para todos o n .
c) Considera a série formal de potências $C(x) = \sum_{n\geq 0} c_n x^n$. Mostra que ela satisfaz a equação funcional $x\,C(x)^2 - C(x) + 1 = 0$.
d) Deduz que os *números de Catalan* c_n são dados por $c_n = \dfrac{1}{n+1}\dbinom{2n}{n}$.

280. (a) Decide se ou não existem valores inteiros x, y tais que $71x - 50y = 1$, e se sim, encontra-os.
(b) Seja $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ de representação decimal $n_k n_{k-1} \cdots n_2 n_1 n_0$. Prova que n é divisível
... por 2 sse $2 \mid n_0$;
... por 4 sse $4 \mid n_1 n_0$;
... por 8 sse $8 \mid n_2 n_1 n_0$;
... por 3 sse $3 | (n_k + n_{k-1} + \cdots + n_2 + n_1 + n_0)$;
... por 9 sse $9 | (n_k + n_{k-1} + \cdots + n_2 + n_1 + n_0)$;
... por 11 sse $11 | (n_k - n_{k-1} + n_{k-2} \cdots \pm n_0)$.
(c) Determina as circunstâncias exactas i.e., $n, b, g \in \mathbb{Z}$, em que os sistemas seguintes de equações permitem soluções $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$: a) $\begin{cases} \mathrm{mdc}(x, y) = 3 \\ x + y = n \end{cases}$ b) $\begin{cases} \mathrm{mdc}(x, y) = g \\ xy = b \end{cases}$

281. Verificar com prova ou contraexemplo que para todo o $n \geq 2$ inteiro se tem $\displaystyle\prod_{k=n}^{2n-2} k = 2^{n-1} \prod_{k=1}^{n-1} (2k - 1)$.

282. Seja ϕ a função de Euler. Para quaisquer dois inteiros positivos k, m existem $k\phi(m)$ inteiros positivos $i \leq km$ com $i \perp m$.

283. Seja $\hat{\phi}(n) = \#\{i \in \mathbb{Z}_{\geq 1} : i \leq n,\ i \perp n,\ (i + 1) \perp n\}$. Mostra que $\hat{\phi}(n) = n \displaystyle\prod_{p|n} (1 - \frac{2}{p})$, onde p é suposto primo.

284. Indica explicitamente uma função bijectiva $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, cujo gráfico não seja uma recta, tal que $f(0) = 2$, $f(f(2)) = 2$ e $f^{-1}(1) = 1$.

285. Determina todas as funções $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que satisfazem $f(x + f(y)) = x + f(f(y))$, para todos os reais x e y e $f(2007) = 2008$.

286. Encontra um polinómio P tal que $P(0) = 4$, $P(2) = -6$ e $P(3) = -8$.

287. Sejam P e Q polinómios mónicos de grau 4 e 2, respectivamente, tais que $P(x)$ é negativo se e só se $Q(x)$ é negativo. Sabendo que o conjunto dos pontos x tais que $P(x)$ é negativo é um intervalo de comprimento superior a 2, mostra que existe um número real t tal que $P(t) < Q(t)$.

288. Determina se existe um polinómio f, com coeficientes inteiros, e números inteiros a, b e c que verifiquem simultaneamente: a) $ac \neq bc$. b) $f(a) = a$. c) $f(b) = b$. d) $c^2 + f(c)^2 + f(0)^2 = 2cf(0)$.

289. Verifica, justificando convenientemente a sua resposta, se existe um par de números inteiros positivos x, y tais que: a) $x^3 + y^4 = 2^{2003}$? b) $x^3 + y^4 = 2^{2005}$?

290. Determina $x, y \in \mathbb{R}$ tais que $\begin{cases} \lfloor x \rfloor + 3\{y\} = 3.9 \\ \{x\} + 3\lfloor y \rfloor = 3.4 \end{cases}$.

291. Considera as sucessões de números reais, (a_n) e (b_n), definidas por $a_1 = 1$, $a_{n+1} = 5\,a_n + 4$ e $5\,b_n = a_n + 1$, $n = 1, 2, \ldots$.

   (a) Determina a_n em função de n.

   (b) Mostra que (b_n) é uma progressão geométrica e calcula a soma $\dfrac{\sqrt{b_1}}{\sqrt{b_2} - \sqrt{b_1}} + \cdots + \dfrac{\sqrt{b_n}}{\sqrt{b_{n+1}} - \sqrt{b_n}}$.

292. Considera um rectângulo com vértice inferior esquerdo A, e os outros vértices em sentido dos ponteiro do relógio designados por B, C, D. Seja M o ponto médio do lado BC. Traça o segmento AM e a diagonal BD. A figura obtida tem quatro regiões. A área da região adjacente ao lado BA é 2, e a da região adjacente ao segmento BM é 1. Determina as áreas das outras duas regiões.

293. A permutação f é dada por $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 1 & 3 & 5 & 2 \end{pmatrix}$. Sendo $a_0 = 1, b_0 = 2, c_0 = 3, d_0 = 4, e_0 = 5$, e $a_{n+1} = f(a_n)$, $b_{n+1} = f(b_n)$, etc. para $n \geq 0$, calcula d_{2006}, e $a_{2006} + b_{2006} + c_{2006} + d_{2006} + e_{2006}$.

294. Determina, caso existam, infinitos inteiros positivos n tais que $n^2 - 19n + 99$ é quadrado perfeito. Caso contrário, lista todos os n que definem quadrados perfeitos.

295. Encontra todos os números primos p tais que $p^2 + 11$ tem menos de 11 divisores.

296. Considera um triângulo $\triangle ABC$ com incentro I. Mostra que $\hat{A} = 2\hat{B}$ se e só se $AI + AC = BC$.

297. *Dois numa bicicleta.* Dois amigos, A e B, viajam na mesma bicicleta e revezam-se a pedalar. As etapas da viagem numeram-se por ordem: etapa 1, etapa 2, etapa 3, etc.. O viajante A pedala nas etapas ímpares, e B nas etapas pares. Na etapa k o pedalante de serviço tem que pedalar pelo menos 1 quilómetro, mas não mais de k quilómetros. A viagem faz-se sempre para a frente, sem recuar. Ganha o que for a pedalar quando chegarem ao destino que fica a 2008 km do ponto de partida. Qual deles tem estratégia para ganhar o jogo? Qual é essa estratégia?

298. Um inteiro da forma $\frac{1}{2}n(n+1)$ diz-se *triangular*. Quantos pares (a, b) de inteiros triangulares com $b - a = 2007$ existem?

299. Demonstra os seguintes resultados sobre a factorização de certos polinómios em uma e várias variáveis, onde $m, n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$. Indica sempre que possível o (ou os) polinómios (com coeficientes reais) cuja existência é afirmada.

   (a) Para todo o n existe um polinómio $p = p_n(x, y)$ tal que $p \cdot (x - y) = x^n - y^n$.

   (b) Existe um polinómio $p = p(x, y, z)$ tal que $p \cdot (x + y + z) = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$.

   (c) Se n é ímpar, então existe um polinómio p tal que $p \cdot (x + 1) = x^n + 1$.

(d) Se $m < n$, então existe um polinómio p tal que $(x^{2^m} + 1) \cdot p = x^{2^n} - 1$.

(e) O polinómio $2(x^2y^2 + x^2z^2 + y^2z^2) - x^4 - y^4 - z^4$ é o produto de quatro polinómios lineares.

(f) Sejam p e q polinómios em $\mathbb{Z}[x]$. Então $p(k)|q(k)$ (divisibilidade em $\mathbb{Z}$) para infinitos inteiros k implica que existe um polinómio $s \in \mathbb{Z}[x]$ tal que $q = p \cdot s$.

300. Seja f uma função real de variável real tal que $f(0) = 1/2$, e suponhamos que existe um número real a tal que $f(x + y) = f(x)f(a - y) + f(y)f(a - x)$, para todos os x, y. Prova que f é constante.

301. Seja $\triangle = \triangle ABC$ um triângulo acutângulo. Considera a família de rectângulos cujos vértices todos estão nos lados de $\triangle$. Determina se existe um ponto que é simultaneamente centro de três tais rectângulos; e neste caso indica como o determinar.

302. Determina os pares (p, q) de primos para os quais $pq|(p^p + q^q + 1)$.

303. Existe alguma função real de variável real f tal que $f(x)$ é limitada, $f(1) = 1$ e, para todo o $x \neq 0$, se tem $f(x + 1/x^2) = f(x) + f(1/x)^2$?

304. *Um jogo de tirar.* Dois jogadores, A e B, retiram pedras de um monte de 10001 pedras. Cada um tem que tirar, na sua vez de jogar, 2, 3, 4, 5 ou 6 pedras. A primeira tiragem (do jogador A) não está sujeita a mais restrições do que essas; mas, a partir daí, cada jogador não pode tirar um número de pedras múltiplo do número retirado pelo adversário na tiragem anterior. Perde o jogador que não possa jogar de acordo com estas regras. Qual dos jogadores tem estratégia para ganhar? Descreva, justificando, uma estratégia para esse jogador vencer.

305. Mostra que para todo o $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$, o inteiro 17^n é soma de três quadrados perfeitos não nulos.

306. Determina os ternos $(x, y, z) \in \mathbb{Z}^3_{\geq 1}$, tais que $2^{3x+3} + 2^{2y+2} + 2^{z+1} = 832$.

307. Sejam $\triangle := \triangle ABC$ um triângulo acutângulo, $\mathcal{C} := \mathcal{C}(\triangle)$ a sua circunferência circunscrita, e M um ponto do plano. Então são equivalentes:

i. M é ortocentro de $\triangle$.

ii. As reflexões de M nos lados de $\triangle$ estão sobre $\mathcal{C}(\triangle)$.

iii. As circunferências $\mathcal{C}(\triangle BMC)$, $\mathcal{C}(\triangle CMA)$, $\mathcal{C}(\triangle AMB)$ são congruentes com $\mathcal{C}(\triangle)$.

iv. $B\hat{M}C = \pi - \hat{A}$, e as igualdades análogas para os outros vértices.

v. $a \cdot |MB| \cdot |MC| + b \cdot |MA| \cdot |MC| + c \cdot |MA| \cdot |MB| = abc$.

vi. $a \cdot v(\overrightarrow{MA}) + b \cdot v(\overrightarrow{MB}) + c \cdot v(\overrightarrow{MC}) = \vec{0}$, onde $v(\vec{u}) = \vec{u}/||\vec{u}||$, significa o versor do vector $\vec{u}$.

308. (a) Determina se o polinómio $x^5 + x^4 + 1$ é factorizável em $\mathbb{Z}[x]$.

(b) Determina todos os pares $(m, n) \in \mathbb{Z}^2_{\geq 1}$ tais que $n^4(n + 1) = 6(1 + 7 + 7^2 + \cdots + 7^{m-1})$.

309. Sejam $ABCD$ um quadrado, r uma recta e M o centro deste quadrado. As diagonais do quadrado medem 2 unidades e a distância entre M e r é maior do que 1. Sejam A', B', C', D' as projecções ortogonais sobre a recta r de A, B, C, D, respectivamente. Prova que fazendo uma rotação do quadrado dado, deixando M fixo, o valor de $\overline{AA'}^2 + \overline{BB'}^2 + \overline{CC'}^2 + \overline{DD'}^2$ é invariante.

310. O *Arquiduque De Boez* deu um banquete a n convidados no qual serviu infinitas iguarias. Uma n-*Irmandade* é um conjunto de n convidados tais que qualquer par deles provou uma iguaria em comum. Não existem duas 3-Irmandades disjuntas, nem uma 5-Irmandade. Prova que é possível o *Arquiduque De Boez* expulsar duas pessoas de modo a deixarem de existir 3-Irmandades.

311. Determina todos os pares (a, p) de inteiros maiores do que 1 tais que: p é primo e $a^{p-1} \,|(p-1)^a + 1$.

312. Seja $a \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$. Mostra que existem condições necessárias e suficientes em termos de k, l para que se tenha $a^k - 1|a^l - 1$. São estas também as condições necessárias e suficientes para que se tenha $x^k - 1|x^l - 1$ no anel $\mathbb{Z}[x]$?

313. Seja $\triangle$ um triângulo e sejam X, Y, Z os pontos de tangência do incírculo de $\triangle$ com os seus lados. Mostra que as cevianas que ligam X, Y, Z aos vértices opostos se intersectam num só ponto.

314. Determina as coordenadas baricêntricas do incentro dum triângulo.

315. Enuncia o teorema chinês dos restos e ilustra a sua prova através do exemplo $x \equiv 3 \mod 7$, $x \equiv 1 \mod 11$, $x \equiv 4 \mod 6$. Indica as soluções de módulo mínimo.

316. Seja p primo. Demonstra a desigualdade de Cauchy-Davenport: – Para $A, B \subseteq \mathbb{Z}_p$ tem-se $p \geq |A + B| \geq \min\{|A| + |B| - 1, p\}$.

317. Para $X \subseteq \mathbb{Z}^d$ seja $\mathcal{D}(X) = \{|a - a'| : a, a' \in A\}$ o conjunto das *distâncias* (euclidianas) realizadas por X.
    (a) Mostra que $\mathbb{Z}^d$ pode ser repartido em dois conjuntos A, B tais que $\mathcal{D}(A) \neq \mathcal{D}(\mathbb{Z}^d)$, e $\mathcal{D}(B) \neq \mathcal{D}(\mathbb{Z}^d)$.
    (b) Mostra que se $A \cup B = \mathbb{Z}^d$, mas $A \cap B \neq \emptyset$ então $\mathcal{D}(A) = \mathcal{D}(\mathbb{Z}^d)$ ou $\mathcal{D}(B) = \mathcal{D}(\mathbb{Z}^d)$.

318. Seja p um primo tal que $p \equiv \pm 3 \pmod 8$ e x um inteiro tal que $p|x$. Prova que o conjunto $\{2^n + x : n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\}$ contém, quando muito, um número finito de quadrados perfeitos.

319. Considera a função $\mathbb{Z}_{\geq 0} \ni i \overset{f}{\mapsto} 1 + \sum_{\ell=0}^{i} (-1)^\ell \cdot \ell \cdot (i - \ell + 1)$. Mostra que $f(i) \geq 0$ para todos os $i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$.

320. Um triângulo é repartido em n triângulos mais pequenos. Mostra que a soma das alturas menores dos triângulos pequenos é maior ou igual a menor altura dos triângulo dado.

321. Determina todos os inteiros positivos n tais que os números $1, 2, \ldots, n$ podem ser ordenados de tal forma que a média aritmética de quaisquer dois números da sequência não aparece entre esses dois números.

322. Determina todos os inteiros positivos menores que 1000 cujo quadrado é igual ao cubo da soma dos seus dígitos.

323. Sejam $x, y \in \mathbb{R}$. Mostra que, se o conjunto $\{\cos(n\pi x) + \cos(n\pi y), n \in \mathbb{N}\}$ é finito, então $x, y \in \mathbb{Q}$.

324. Sejam $n > 2$ um inteiro, e $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função, tal que $f(A_1) + f(A_2) + \cdots + f(A_n) = 0$, onde $A_1, A_2, \ldots, A_n$ são os vértices de um polígono regular de n lados. Mostra que f é a função nula.

325. Determina todas as famílias $\mathcal{F}$ de n inteiros tais que nenhuma subfamília de $\mathcal{F}$ tem soma divisível por $n+1$.

326. Prova ou apresenta um contra-exemplo sff: se $A \supseteq B \cup C$, então $(A \times A) - (B \times C) = (A - B) \times (A - C)$.

327. Dadas aplicações $A \xrightarrow{g} B$ e $B \xrightarrow{f} C$. Mostra que:
a) Se f, g são injectivas, então $f \circ g : A \to C$ é injectiva.
b) Se f, g são sobrejectivas, então $f \circ g : A \to C$ é sobrejectiva.
c) g é bijectiva se, e somente se, existir uma aplicação $B \xrightarrow{h} A$ tal que $g \circ h = \mathrm{id}_B$ e $h \circ g = \mathrm{id}_A$.

328. Seja Ω um conjunto arbitrário (que pode ser infinito). Considera uma aplicação $f : \Omega \to 2^\Omega$.
a) Usando f constrói um conjunto $A \subseteq \Omega$ que não está no conjunto imagem de f.
b) Infere que $|A| < |2^A|$.

329. Seja r um racional positivo e $1 < a_1 < a_2 < a_3 < \cdots$ uma sucessão de inteiros. Demonstra que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^n}{a_n!}$ é um irracional. (São também notáveis provas de casos especiais.)

330. Sejam a e b inteiros tais que $a|b$. Prova que $\phi(a)|\phi(b)$.

331. Seja k um inteiro positivo; encontra um inteiro n tal que o polinómio $x^2 - 1$ tenha pelo menos k raízes em $\mathbb{Z}_n$.

332. Indica, **justificando**, o valor lógico da seguintinte afirmação:
– "Dado um tabuleiro 11×11 branco. É possível, pintar 30 casas a preto tal que não exista um rectângulo com lados paralelos aos do tabuleiro cujos vértices todos sejam pretos."

333. Mostra que não existem $k \geq 3$ conjuntos distintos $A_1, A_2, \ldots, A_k$ tais que os conjuntos $A_1 \Delta A_2$, $A_2 \Delta A_3$, $\ldots$, $A_k \Delta A_1$ são todos disjuntos.

334. Seja n um inteiro positivo e seja $\mathcal{A} = \{A_1, \ldots, A_m\}$ uma família de $m \geq n$ subconjuntos do conjunto $\Omega = \{1, 2, \ldots, n\}$.
a) Se quaisquer n destes conjuntos têm um elemento em comum, então existe um elemento comum a todos os conjuntos em $\mathcal{A}$.
b) No entanto, se apenas quaisquer $n-1$ dos conjuntos em $\mathcal{A}$ têm um elemento em comum, não precisa de existir elemento comum a todos os conjuntos em $\mathcal{A}$.

335. Considera a função polinomial $f(x) = (1 + x + x^2)^{1005}$ que admite a seguinte representação
$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_{2010} x^{2010}.$$
Analisa a paridade de $a_0 + a_2 + \cdots + a_{2010}$.

336. Seja p um primo ímpar, prova que $(p-3)! \equiv (p-1)/2 \mod p$.

337. Para que *primos de Fermat e de Mersenne* 2 é uma *raiz primitiva*?

338. Um cofre tem n fechaduras distintas e pode ser aberto apenas se todas elas estiverem abertas. Cinco pessoas a,b,c,d,e recebem chaves para algumas das fechaduras. Determina o menor n tal que o cofre pode ser aberto se, e só se, uma das condições seguintes se verifica:
· as pessoas a,b estão presentes;
· as pessoas a,c,d estão presentes.

· as pessoas b,d,e estão presentes.
Indica também uma das possíveis distribuições das chaves $1, 2, \ldots, n$ pelas pessoas.

(Uma pessoa pode receber várias chaves, e pessoas distintas podem receber parcialmente as mesmas.)

339. Seja $n \geq 2$ e $\Omega_n = \{1, 2, \ldots, n\}$. Quantas funções $f : \Omega_n \to \Omega_n$ existem tais que para todo o $j \in \Omega_n$ se tenha $f(f(j)) = 1$?
a. Nos casos $n = 2, 3, 4$.
b. No caso geral. Dá uma fórmula que expresse o número pedido, usando um sumatório; preferivelmente uma que use não mais que 24 símbolos do alfabeto $-, +, \cdot, (,), =, 1, n, k, \sum$.
Exemplo: a fórmula $\sum_{k=1}^{4} k \cdot \binom{4}{k}$ usa 11 símbolos, todos do alfabeto $=, (,), \cdot, +, 1, 4, k, \sum$.
(O '$+$' na verdade não é usado.)

340. Sejam $A_1, A_2, \ldots, A_m$ m conjuntos distintos. Mostra que de entre os conjuntos $A_i \Delta A_j$, $1 \leq i < j \leq m$ existem pelo menos m conjuntos distintos dois a dois.

341. Considera a função $\psi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, de expressão analítica $\psi(n) = \sum_{k=1}^{n} (k, n)$, $n \in \mathbb{N}$, onde (k, n) denota o máximo divisor comum de k, n.

a) Mostra que $\psi(mn) = \psi(m)\psi(n)$, para todo m, n primos entre si (i.e. co-primos).

b) Mostra que para cada $a \in \mathbb{N}$, a equação $\psi(x) = a\,x$ é possível em $\mathbb{N}$.

c) Determina todos os $a \in \mathbb{N}$ tais que a equação $\psi(x) = a\,x$ tem solução única.

342. Seja k um inteiro maior do que 1 dado, e considera $m = 4\,k^2 - 5$. Mostra que, existem a, b inteiros positivos, tais que a sucessão (x_n) definida por $x_0 = a\,,\ x_1 = b\,,\ x_{n+2} = x_{n+1} + x_n\,,\ \ n = 0, 1, \ldots$ tem todos os seus elementos co-primos com m.

343. Mostra que existem infinitos inteiros $m \geq 1$, tais que a função $\mathbb{Z}_m \ni k \overset{s}{\mapsto} s(k) = \sum_{i=1}^{k} i \in \mathbb{Z}_m$ define uma permutação em $\mathbb{Z}_m$ com ponto fixo 0.

344. Seja $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$, $\Omega_n = \{1, 2, \ldots, n\}$, e $f : 2^{\Omega_n} \to \{0, 1, \ldots, n\}$ uma aplicação (que dá a cada subconjunto de Ω_n uma das 'etiquetas' $0, 1, \ldots, n$). Mostra que uma das afirmações seguintes, i ou ii, é verdadeira:
i. Existem conjuntos A, B (distintos) com $A \subset B \subseteq \Omega_n$ que têm a mesma etiqueta (isto é: $f(A) = f(B)$).
ii. Todos os subconjuntos de Ω_n da mesma cardinalidade têm a mesma etiqueta.

345. a. Sejam a, b inteiros positivos coprimos. Defina-se $x_0 = a$, $x_1 = b$, e $x_{n+2} = x_{n+1} + x_n$, para $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Mostra que para todo o n, $x_n \perp (a^2 - b^2 + ab)$. (Nota que x_n depende de a, b: $x_n = x_n(a, b)$.)

b. Mostra que para todo o $k \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$ existem inteiros positivos coprimos a, b tais que $4k^2 - 5 | (a^2 - b^2 + ab)$.

c. Deduz um resultado afirmado no exercício 342.

d. Dá inteiros positivos coprimos tais que $a^2 - b^2 + ab \notin \{4k^2 - 5 : k \in \mathbb{Z}_{\geq 2}\}$ e tal que os x_n definidos como em (a) todos satisfazem $x_n \perp a^2 - b^2 + ab$.

e. Discute sucintamente a seguinte questão: com base em a, b, c, d é lícito afirmar-se que (a) é resultado genuinamente mais forte do que (c) ? Ou há (em princípio) ainda a possibilidade de provar (a) com base em (c)?

346. Seja n um inteiro positivo, prova que há infinitos primos p tais que $p \equiv 1 \mod 2^n$.

347. Seja p um primo. Prova que todo o elemento de $\mathbb{Z}_p^*$ é um quadrado módulo p ou uma raíz primitiva módulo p se e só se p é um primo de Fermat.

348. Quantas soluções distintas módulo 441 tem a equação $x^5 + 4x + 4 \equiv 0 \mod 441$?

349. O Duarte quer desenhar um rectângulo, dividido em $n \times m$ quadrículas de lado 1 cm, sem levantar o lápis. Qual é o comprimento da linha mais curta que permite fazer este desenho?

350. a. Seja $\triangle = \triangle ABC$ um triângulo, I um ponto no seu interior, e AX, BY, CZ cevianas concorrentes em I. Mostra a desigualdade $\frac{|AI|}{|AX|}\frac{|BI|}{|BY|}\frac{|CI|}{|CZ|} \leq \frac{8}{27}$.

b. Se I for incentro de $\triangle$, então tem-se também a desigualdade $\frac{1}{4} \leq \frac{|AI|}{|AX|}\frac{|BI|}{|BY|}\frac{|CI|}{|CZ|}$.

351. Sejam $m, n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ e $S \subseteq \{1, 2, \ldots, m\} \times \{1, 2, \ldots, n\}$ tal que $|S| \geq m + n$.

Mostra que existem $(x, y), (x', y') \in S$ tais que $x < x'$ e $y < y'$.

352. Seja n um inteiro ímpar positivo. Prova que $\sigma(n)^3 \leq n^4$.

353. Considera a família de todos os triângulos $\triangle ABC$ com $|BC| = a$ fixo e o ponto A variando sobre uma circunferência $\mathcal{C}(\mathit{O}, r)$ tal que se tenha a colinearidade $B - C - \mathit{O}$ e $|C\mathit{O}| = d$. Seja $X = X(\triangle) = \text{biss}(\hat{A}) \cap g_{BC}$. Expressa em termos de r e d os valores mínimo e máximo da fracção $|BX|/|XC|$. Podemos escolher O e r tal que o ponto X não varia com A? Em particular, existe uma solução no caso $a = 3, r = 2$?

354. O número $s_{n,m}$ das aplicações sobrejectivas $f : \{1, \ldots, m\} \to \{1, \ldots, n\}$, é dado por
$$s_{m,n} = n^m - \binom{n}{1}(n-1)^m + \binom{n}{2}(n-2)^m - \cdots + (-1)^n\binom{n}{n-1}1^m.$$
Que espantosa identidade obtemos para o caso $m = n$?

355. Seja $n \in \mathbb{Z}_{\geq 3}$ fixo e supõe associado a todos os pontos do plano euclidiano E um real tal que para todo o n-ágono regular a soma dos reais correspondentes aos seus vértices é 0. Então todos os reais são 0.

356. Encontra todos os inteiros N tais que $N + 25$ é um quadrado perfeito e os únicos divisores primos de N são 2 e 5.

357. Determina os inteiros positivos n tais que existe um polinómio, f, de grau n, com coeficientes inteiros, para o qual $f(1), f(2), \ldots, f(n)$ são potências distintas de 2.

358. Encontra todas as funções $f : \mathbb{Q}^+ \to \mathbb{Z}$ tais que $f(1/x) = f(x)$ e $(x+1)f(x-1) = xf(x)$ para todo o x racional maior que 1.

359. Sejam A uma matriz $n \times n$ de entradas não-negativas, e α, β reais tais que a soma das duas maiores entradas de cada fila (=linha horizontal) é igual a α, e a soma das duas maiores entradas de cada coluna é igual a β. Mostra que $\alpha = \beta$.

360. Sejam $r_1, r_2, \dots, r_m$ e $c_1, \dots, c_n$ inteiros não-negativos. Dá com prova uma condição necessária e suficiente em termos destes inteiros para que exista uma matriz $m \times n$ de 0's e 1's que tenha os inteiros r_i, $i = 1, \dots, m$, como somas-filas, e os c_j, $j = 1, 2, \dots, n$ como somas-colunas.

    (A soma-fila r_i é a soma das entradas da i-ésima fila da matriz; a soma-coluna c_j é soma das entradas da j-ésima coluna da matriz).

361. Seja f uma função real de variável real satisfazendo para todo o $x, y \in \mathbb{R}$
$$f(x^3 + y^3) = (x + y)((f(x))^2 - f(x)f(y) + (f(y))^2)\,.$$
Sendo $S = \{a \in \mathbb{R}^+ : f(a\,x) = a\,f(x)\,,\ \forall x \in \mathbb{R}\}$, mostra que:
a. Se $c \in S$ então $c^{1/3} \in S$; b. $2009 \in S$.

362. Considera os polinómios
$$f(x) = x^6 + ax^5 + bx^4 + cx^3 + dx^2 + ex + 1\,,\quad g(x) = x^6 + ex^5 + dx^4 + cx^3 + bx^2 + ax + 1$$
onde a, b, c, d, e, f são números reais distintos. Averigua qual o número máximo de raízes reais distintas que f e g podem ter em comum, e indica para que coeficientes este número é atingido.

363. Sejam $x_1, \dots, x_n$ reais. Prova que $\dfrac{x_1}{1 + x_1^2} + \dfrac{x_2}{1 + x_1^2 + x_2^2} + \cdots + \dfrac{x_n}{1 + x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2} < \sqrt{n}$.

364. Encontra todos os inteiros positivos n tais que para todo o inteiro a existem x e y inteiros tais que $x^2 + y^2 = a \pmod{n}$.

365. Dados reais $a \le b$, e uma sucessão de reais positivos distintos p_i, $i = 1, 2, \dots, n$, considera o conjunto
$$D = \{\underline{q} = (q_1, \dots, q_n) \in [a, b]^n : \sum_{i=1}^n q_i = 0\}, \quad \text{e a função} \quad D \ni \underline{q} \overset{l}{\mapsto} l(\underline{q}) = \sum_{i=1}^n p_i q_i.$$
Determina propriedades notáveis do(s) n-uplo(s) $\underline{q}_0$ que maximizem l (caso existam) e explica com prova um método finito para o(s) encontrar. O que acontece se os p_i são parcialmente iguais?

366. Quantos subconjuntos de k elementos em $\Omega = \{1, 2, \dots, n\}$ existem que não contêm elementos consecutivos de Ω?

367. Dois n-uplos reais $\underline{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ e $\underline{b} = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ decrescentes estão na relação $\underline{a} \preceq \underline{b}$ (dito '$\underline{b}$ *majora* $\underline{a}$') se $\sum_{i=1}^k a_i \le \sum_{i=1}^k b_i$ vale para $k = 1, 2, \dots, n$, com igualdade para $k = n$. Para quaisquer dois vectores $\underline{a}, \underline{b}$ escreve-se $\underline{a} \preceq \underline{b}$ se a relação anterior vale após rearranjos decrescentes de $\underline{a}$ e de $\underline{b}$. O *conjugado* de um n-uplo $\underline{a}$ é a sucessão $\underline{a}^* = (a^*_\ell)_{\ell \ge 1}$ definida por $a^*_\ell = |\{j : a_j \ge \ell\}|$.

    Sejam $r_1, r_2, \dots, r_m$ e $c_1, c_2, \dots, c_n$ inteiros não-negativos, sendo os r_i menores ou iguais a n. Mostra que existe uma matriz $m \times n$ de 0s e 1s que tem os inteiros r_i, $i = 1, \dots, m$, como somas-fila, e os c_j, $j = 1, 2, \dots, n$ como somas-coluna se e só se $(c_1, \dots, c_n) \preceq (r^*_1, \dots, r^*_n)$.

368. Determine em $\mathbb{R}$ as soluções do sistema $x^3 = 2y - 1\,,\ y^3 = 2z - 1\,,\ z^3 = 2x - 1\,.$

369. Prova que, para qualquer inteiros positivos n, existe um polinómio de grau n, com coeficientes inteiros, para o qual $f(1), f(2), \ldots, f(n)$ são potências distintas de 2.

370. Verifica se a equação $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}+\dfrac{1}{abc}=\dfrac{12}{a+b+c}$ tem um número infinito de soluções para $a, b, c \in \mathbb{Z}^+$.

371. Para $k, n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ define $s_k(n) = \sum_{j=1}^{n} j^k$. Mostra para $m \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ que $1 + \displaystyle\sum_{k=0}^{m-1} \binom{m}{k} s_k(n) = (n+1)^m$.

372. Constrói uma família de sucessões aritméticas cuja união é $\mathbb{Z}$ mas que não admite nenhuma subfamília finita com a mesma propriedade.

373. Determina todas as funções reais de variável real, f, tais que $f(x^2 + y^2 + 2\,f(xy)) = (f(x+y))^2$, para todo o $x, y \in \mathbb{R}$.

374. A circunferência inscrita do triângulo ABC é tangente aos lados em $D \in BC, E \in CA, F \in AB$. O segmento AD é bissectado pela circunferência em X. Os segmentos XB e XC cortam a circunferência (ainda) em Y e Z, respectivamente. Prova que $|EY| = |FZ| = \dfrac{1}{\sqrt{2bc}}(3(s-a)\sqrt{s-b}s-c)$.

375. Determina o número $s(n)$ dos inteiros (i, j, k) de inteiros que satisfazem $0 \leq i < j < k$ e $i + j + k = n$. Tenta expressar $s(n)$ por uma fórmula fechada com menos que 30 símbolos tirados do alfabeto

$$\{(,),1,2,3,\ldots,9,n,\lceil,\rceil,\chi,|,+,-,\cdot,\}.$$

Aqui χ pode ser usado no sentido de $\chi(P)$ ser 1 se a propriedade P for verdadeira, e 0 se for falsa.

376. Determina todos os inteiros n para os quais todos os polinómios $f(x)$ tais que $0 \leq f(x) \leq n$, para $x \in \{0, \ldots, n+1\}$ verificam necessariamente $f(0) = f(1) = \cdots = f(n+1)$.

377. No triângulo $[ABC]$, a bissectriz de B intersecta o circuncírculo de ABC em D. Prova que $\overline{BD}^2 > \overline{AB}.\overline{CB}$.

378. Sejam a, b, c, d reais tais que $\dfrac{a+b}{c+d} = \dfrac{b+c}{a+d} \neq -1$. Prova que $a = c$.

379. Para que valores de $\alpha \in \mathbb{R}$ existe uma função real de variável real, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, não constante, tal que $f(\alpha(x+y)) = f(x) + f(y)$?

380. Seja $\alpha = \sqrt[3]{\sqrt[3]{2} - 1}$.

a. Constrói um polinómio $p \in \mathbb{Z}[x]$ que satisfaz $p(\alpha) = 0$.

b. Mostra que $\sqrt[3]{\sqrt[3]{2} - 1} = \sqrt[3]{\dfrac{1}{9}} - \sqrt[3]{\dfrac{2}{9}} + \sqrt[3]{\dfrac{4}{9}}$.

381. Suponhamos que temos um tabuleiro de damas com 7 linhas numeradas de 1 a 7 e infinitas colunas. Colocam-se inicialmente quantas damas quisermos e onde quisermos (no máximo 1 por casa) na primeira e segunda linha. É válido o movimento de "tomar" nas direcções horizontal e vertical em qualquer sentido e nunca diagonalmente. O movimento "tomar" consiste em dadas duas damas adjacentes (não diagonalmente) remove-se uma delas do tabuleiro e a outra move-se duas casas na direcção da casa onde estava a dama removida, a "toma" só é válida se a casa onde termina a dama que "tomou" a outra estiver livre antes

da "toma". O objectivo, é chegar com uma dama à linha com o maior número possível. Quantas damas são necessárias para chegar à sexta linha? Será possível chegar à sétima linha?

382. Estão 3 sapos em três vértices distintos de um quadrado. A cada minuto um deles salta por cima de outro ficando à mesma distância (e na mesma recta definida pelos dois sapos). Será possível que um dos sapos chegue ao vértice do quadrado que não estava ocupado inicialmente?

383. Mostra que os pares de inteiros (x, y) tais que 19 divide $x + 5y$ são exactamente aqueles que satisfazem que 19 divide $9x + 7y$.

384. Partindo de um triângulo $\triangle ABC$ com incentro I e circunferência inscrita $\mathcal{C}$, considera a família de todos os triângulos $\triangle A'B'C'$ tais que $B' \in IB^+$, $C' \in IC^+$, e $\mathcal{C}$ é sua circunferência inscrita. Determina o lugar geométrico dos seus vértices A'.

   (Aqui, para pontos $X \neq Y$, XY^+ significa a semirecta com origem X e contendo Y.)

385. Determina quantos números existem, com 6 algarismos, de modo que:

   (a) o número formado pelos seus três primeiros algarismos seja múltiplo do número formado pelos seus três últimos algarismos (como, por exemplo, 802401);

   (b) o número formado pelos seus dois primeiros algarismos seja múltiplo do número formado pelos dois algarismos do meio e este número seja múltiplo do número formado pelos dois últimos algarismos (como, por exemplo, 651313).

386. Demonstra que um número é divisível por 3 se e só se a soma dos seus dígitos for divisível por 3.

387. Encontra todos os inteiros positivos tais que $n^2 + 1$ é divisível por $n + 1$.

388. Encontra todos os inteiros $x \neq 3$ tais que $x - 3 | x^3 - 3$.

389. Encontra inteiros x e y tais que $5x + 7y = 1$.

390. Dado um polígono regular com $2n + 1$ vértices, escolhem-se ao acaso 3 vértices. Qual é a probabilidade de o centro do polígono estar no interior do triângulo formado por estes 3 vértices?

391. Sejam A, A', B, B' conjuntos. Decide com prova ou contra exemplo se $(A \cap A') \times (B \cap B') = (A \times B) \cap (A' \times B')$.

392. Uma *partição* de um inteiro positivo n é um k-uplo $n_1, n_2, \ldots, n_k \geq 1$ de inteiros com $n_1 \geq n_2 \geq \cdots \geq n_k \geq 1$ cuja soma é n. Os n_i, $i = 1, 2, \ldots, k$, dizem-se *partes* da partição.

   Mostra que o número das partições de um inteiro n em partes ímpares é igual ao número das partições de n em partes distintas.

   Por exemplo, para $n = 6$ temos $(5, 1), (3, 3), (3, 1, 1, 1), (1, 1, 1, 1, 1, 1)$ como partições em partes ímpares, e $(5, 1), (6), (3, 2, 1), (4, 2, 1)$ como partições em partes distintas.

393. As alíneas a,b,c são visam averiguar se perceberam a matéria 'relações binárias' transmitida em sessões passadas. Mas de resto são independentes.

a. O *fecho reflexivo* de uma relação binária R num conjunto X é a menor relação binária contendo R que seja reflexiva. O *fecho transitivo* é definido de modo similar. Por exemplo: se $R = \{(1,2),(2,3)\}$ for considerada relação binária sobre o conjunto $\{1,2,3\}$, então o fecho reflexivo de R é $R \cup \{(1,1),(2,2),(3,3)\}$, e o fecho transitivo é $R \cup \{(1,3)\}$.

Considera no conjunto $X = \{1,2,3,4,5\}$ a relação binária $R = \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5),(1,2),$ $(1,3),(1,4),(2,4),(3,4),(3,5)\}$.

Acrescenta-lhe um único par (a,b) de modo que $R' = R \cup \{(a,b)\}$ seja uma relação de ordem. Determina o menor conjunto $R_1 \subseteq R'$ cujo fecho reflexivo e transitivo seja R'.

b. Sejam X, Y conjuntos e $f : X \to Y$ uma aplicação. Define uma relação binária $\sim$ em X por $x \sim x'$ sse $f(x) = f(x')$. Mostra que $\sim$ é uma relação de equivalência em X.

c. Seja X um conjunto munido de uma relação de equivalência. Mostra que as classes de equivalência definem uma partição de X.

394. Seja $T := \{(k,l) \in \mathbb{Z}^2_{\geq 1} : k \leq l\}$, e seja $m_0 \geq 2$. Mostra que a função $T \ni (k,l) \mapsto k + l + m_0 kl \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ não é injectiva.

(Os mais novos tentem a prova para casos especiais; $m_0 = 3$ por exemplo.)

395. Sejam a, b, c os comprimentos dos lados de um triângulo. Mostra que $\dfrac{1}{3} \leq \dfrac{a^2+b^2+c^2}{(a+b+c)^2} < \dfrac{1}{2}$.

396. Determina todos os valores do primo p para os quais a soma dos algarismos de $N = (p+1)(p+2)$ é mínima.

397. a. Define o conceito do grupo.

b. Descreve os grupos de simetria de um triângulo isósceles (genérico) e de um triângulo equilátero através de tabelas (à semelhança do que fizemos com o quadrado).

c. Seja G um grupo (multiplicativo) com elemento neutro e. Demonstra:

i. Se $a, b \in G$ são tais que $bab^{-1} = a^r$ para algum $r \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$, então $b^j a b^{-j} = a^{r^j}$ para todos os $j \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$.

ii. Se $a^2 = e$ para todos os $a \in G$, então G é grupo comutativo.

iii. Se $|G| \in 2\mathbb{Z}$, então G contém um elemento a tal que $a^2 = e$.

398. Seja G um monóide (multiplicativo) e $\sim$ uma relação de equivalência em G com a propriedade que $a_1 \sim b_1$ e $a_2 \sim b_2$ implica $a_1 a_2 \sim b_1 b_2$. Com $\overline{a}$ designamos a classe de equivalência de $a \in G$. Mostra que a família das classes de equivalência define ela mesma um monóide através da definição $\overline{a}\,\overline{b} := \overline{ab}$.

(Deves mostrar que a multiplicação é bem definida; não dependente dos representantes das classes.)

Nota: Um monóide é um conjunto munido de uma multiplicação associativa com elemento neutro.

399. Seja $\triangle ABC$ um triângulo. Sejam X, X' os pontos de tangência da sua incircunferência, e duma apropriada excircunferência, respectivamente, no segmento BC. Mostra $|BX| = |CX'|$, e, se Z, Z' são os pontos de tangência destas circunferências com o raio AB^+, então $|ZZ'| = |BC|$.

400. Seja $\mathcal{C}$ uma circunferência de centro O, e AB um seu diámetro. Seja $R \in \mathcal{C}$ um ponto diferente de A e de B, P o ponto médio do segmento AR e $Q \in OP^+$ um ponto tal que se tenha a colinearidade $Q - P - O$ e $|QP| = \frac{1}{2}|PO|$. Com T designamos a intersecção do segmento AR com a paralela por Q a AB. Finalmente seja $H = AQ^+ \cap OT^+$. Mostra que os pontos H, R, e B são colineares.

401. Seja $x_1 = 2$ e $x_{n+1} = \dfrac{2x_n}{3} + \dfrac{1}{3x_n}$, $n = 1, 2, \ldots$ Mostra que para todo o $n > 1$, se tem $1 < x_n < 2$.

402. Mostra que se $a_1, \ldots, a_n$ é uma progressão geométrica de razão r então $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 \frac{r^n - 1}{r - 1}$.

403. Um número inteiro n diz-se *perfeito* se a soma dos seus divisores for igual a duas vezes o próprio número, ou seja, se $\sigma(n) = 2n$.

   (i) Mostra que se $2^n - 1$ é um número primo então $2^{n-1}(2^n - 1)$ é um número perfeito (a estes números dá-se o nome de números perfeitos Euclideanos).
   (*Sugestão: usa o facto de a função σ ser multiplicativa em pares de números coprimos, ou seja, que $\sigma(mn) = \sigma(m)\sigma(n)$ se m e n forem coprimos.*)

   (ii) Mostra que todo o número par perfeito é da forma $2^{n-1}(2^n - 1)$ com $2^n - 1$ um número primo (Euler).

404. Considera uma sucessão $(a_n)_{n \geq 0}$ de reais que satisfaz a relação $a_{n+1} = |a_n| - a_{n-1}$. Mostra que a sucessão é periódica com periodo 9.

405. Sejam AB, AM, BN segmentos tais que $AM||BN$ e tais que exista o conjunto singular (ponto) $\{P\} = AN \cap BM$. Seja $C \in AB$ tal que $PC||AM$. Mostra que $\dfrac{1}{|AM|} + \dfrac{1}{|NB|} = \dfrac{1}{|PC|}$

406. Sejam a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 reais tais que $\sum_{i=1}^{5} a_i^2 = 1$. Mostra que então $\min\limits_{1 \leq i < j \leq 5} (a_i - a_j)^2 \leq \dfrac{1}{10}$.

407. Mostra que se $\Phi(n^2) = n\Phi(n)$, para $n \geq 1$.

408. Mostra que n é primo se e só se $\sigma(n) + \Phi(n) = n\tau(n)$.

409. Quais os últimos dois dígitos de 3^{256}? (Sugestão: Usa o Teorema de Euler para reduzir o número de forma conveniente.)

410. Duas semicircunferências com diâmetros AB e BC satisfazem $|AB| = 3|BC|$ e a colinearidade $A - B - C$ e situam-se do mesmo lado da recta g_{AC}. Sejam a e c rectas tangentes nos pontos A e C respectivamente. Seja $\mathcal{C}$ uma circunferência tangente a a, c e à maior das duas semicircunferências. Mostra que existe uma circunferência que é tangente a c a $\mathcal{C}$ e às duas semicircunferências.

411. Pormenoriza a seguinte prova da desigualdade aritmética geométrica.
   a. Para $y \geq 0$ e $m \geq n$ inteiros tem-se $\frac{1}{m}(y^m - 1) - \frac{1}{n}(y^n - 1) \geq 0$.
   b. Por substituições adequadas deduz $x^\alpha - \alpha x + \alpha - 1 < 0$ se $0 < \alpha < 1$, $\alpha \in \mathbb{Q}$, $x > 0$.
   c. Assume que por continuidade (2) também é válido para quaisquer $\alpha \in \mathbb{R}$ com $0 < \alpha < 1$.
   d. Por substituição adequada deduz: se $\alpha + \beta = 1, \alpha, \beta > 0, x, y > 0$, então $x^\alpha y^\beta \leq \alpha x + \beta y$.
   e. Utiliza indução sobre n para deduzir: se $x_i \geq 0$, $\alpha_i > 0$, $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 1$, então $\prod_{i=1}^n x_i^{\alpha_i} \leq \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i$.

   (Os valores de x, α, β, etc. podem naturalmente variar de alínea para alínea.)

412. Mostra que a equação Diofantina $x^2 - 55y^2 = 43$ não tem soluções.

413. Mostra que 4 cortes podem dividir um queijo em 15 partes.

414. Seja p um número primo e seja $f(x)$ um polinómio do segundo grau onde o coeficiente de x^2 não é múltiplo de p. Mostra que entre os p pontos da forma $(n, f(n))$, onde as coordenadas são consideradas módulo p, não há três colineares.

415. Seja $[ABCD]$ um quadrado e M o seu centro. A reflexão de M em relação a C é um ponto E. Seja S a intersecção do circuncírculo de $[BDE]$ com $[AM]$. Mostra que S é o ponto médio de $[AM]$.

416. Determine um número infinito de ternos $(a, b, c) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, que não estão em progressão aritmética mas $ab + 1,\ bc + 1,\ ca + 1$ são quadrados perfeitos.

417. Mostra que o último dígito de um número perfeito par é 6 ou 8.

418. Mostra que p divide $1^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdots (p-2)^2 + (-1)^{\frac{p-1}{2}}$, qualquer que seja o primo ímpar p.

419. Numa mesa circular estão sentadas 2010 pessoas, tendo um terço delas uma caneta azul, um terço uma caneta preta e um terço uma caneta vermelha. Num dado momento, todas as pessoas cujos vizinhos imediatos tinham uma caneta da mesma cor levantaram-se (a pessoa que se levanta não tem necessariamente uma caneta da mesma cor dos seus vizinhos). Qual é o número máximo de pessoas que se levantaram?

420. Pinta-se um rectângulo $m \times n$ com duas cores (preto e branco). Seja N o número de colorações tais que existe um caminho de quadrados pretos a ligar o lado direito ao lado esquerdo (onde por caminho se entende sequência de quadrados adjacentes por uma aresta). Seja M o número de colorações com pelo menos dois caminhos disjuntos entre os dois lados. Prova que $N \geq 2^{mn} M$.

421. Mostra que, para qualquer primo p, existem inteiros x e y tais que $x^2 + y^2 + 1$ é um múltiplo de p.

422. Seja G o baricentro (ou: 'gravicentro') do triângulo $\triangle ABC$, e sejam $X \in g_{BC}$, $Y \in g_{AC}$, e $Z \in g_{AB}$ tais que se tem a colinearidade $Z - G - Y - X$. Mostra que então $\dfrac{1}{GX} + \dfrac{1}{GY} + \dfrac{1}{GZ} = 0$.
   Aqui põe $1/GX = 1/|GX|$ e define as outras distâncias recíprocas de formas análogas *mas* multiplica-as com -1 se o seu vector associado tiver sentido contrário do vector $\overrightarrow{GX}$.

423. Pensemos as capitais da Europa enumeradas $1, 2, 3, \ldots, n$ de tal forma que toda a capital de etiqueta $j \leq n - 1$ está ligada por avião a não mais outras capitais do que a capital $j + 1$. Seja L um inteiro por tanto

menor que $n-1$ como há ligações entre a capital $n-1$ e as outras capitais. Supõe que cada uma das primeiras L capitais está ligada a pelo menos uma capital mais do que a sua etiqueta indica.

o. Usando os teus conhecimentos geográficos mostra que o valor de n é maior que vinte.
a. Mostra que por uma série de vôos um cidadão de qualquer capital pode visitar qualquer outra.
b. O mesmo fica válido se algum aeroporto fecha por causa das cinzas islandesas.
c. Expressa as afirmações subjacentes à primeira parte, a (a), e a (b), em termos da linguagem típica de um teorema da teoria dos grafos e prova-as, se possível, nesta forma.

424. Considera os inteiros, n, k com $n \geq k \geq 0$, e definimos a sucessão $(c(n,k))$ por

$$c(n,0) = c(n,n) = 1,\ n \geq 0,$$
$$c(n+1,k) = 2^k c(n,k) + c(n,k-1),\ n \geq k \geq 1.$$

Mostra que $c(n,k) = c(n,n-k)$, $n \geq k \geq 0$.

425. Um *triângulo Pitagórico* é um triângulo rectângulo cujos lados têm como comprimento um número inteiro. Mostra que o raio da circunferência inscrita num triângulo Pitagórico é um número inteiro.

426. Seja $\{n_j\}_{j=1}^{\infty}$ a sucessão crescente de todos os inteiros positivos que não contêm o digito 9 na sua representação decimal. Então $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{n_j} < 80$.

427. Considerem-se no plano um ponto F ('fulcro') e duas rectas x e y, não passando por F. Nestas últimas introduzimos coordenadas lineares ('réguas') com origens O_x e O_y e unidades de distâncias quaisquer. Uma recta g qualquer pertencente ao feixe das rectas por F intersecta (salvo em casos de paralelidade) a recta x num ponto $X = X(g)$ de coordenada (por conveniência também chamada) x, e y num ponto $Y = Y(g)$ de coordenada y. Mostra que existem reais a, b, c, d tais que (independente de g) se tem $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$

428. Mostra que para todos os reais positivos a, b, c, d temos

(a) $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{4}{c} + \dfrac{16}{d} \geq \dfrac{64}{a+b+c+d}$
(b) $a^4b + b^4c + c^4d + d^4a \geq abcd(a+b+c+d)$

429. Seja $e_j(\underline{x}) = e_j(x_1, \ldots, x_n)$ o j-esimo polinómio elementarmente simétrico, $j = 0, 1, \ldots, n$. Sejam $\underline{r} = (r_1, \ldots, r_n)$ um n-uplo de números reais e $l \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$ um inteiro tais que $e_l(\underline{r}) = e_{l+1}(\underline{r}) = 0$. Mostra que então $e_{l+2}(\underline{r}) = e_{l+3}(\underline{r}) = \cdots = e_n(\underline{r}) = 0$.

430. Seja $k > 1$ um inteiro fixo e $M(n) = \operatorname{mmc}(n, n+1, \ldots, n+k)$. Prova que existem infinitos inteiros positivos n tais que $M(n+1) < M(n)$.

431. Sejam a, b, c, d quatro números reais não negativos tais que $a+b+c+d = 1$. Mostra que $abc + bcd + cda + dab \leq \dfrac{1}{27} + \dfrac{176}{27}abcd$.

432. Sejam k um inteiro fixo maior do que 1 e $m = 4\,k^2 - 5$.
Para cada par de números inteiros positivos, (a,b), definimos a sucessão (x_n) por $x_0 = a$, $x_1 = b$, $x_{n+2} = x_{n+1} + x_n$, $n = 0, 1, \ldots$
Mostra que existe (a,b), tais que m e todos os termos da sucessão (x_n) são primos entre si (ou co-primos).

433. Seja r uma raiz primitiva de um número primo ímpar p. Mostra que $-r$ é uma raiz primitiva de p se $p \equiv 1 \pmod 4$, e que $-r$ tem ordem $\frac{p-1}{2}$ módulo p se $p \equiv 3 \pmod 4$.

434. Dados um primo p maior do que 2 e um inteiro positivo n, considera a soma $S = 1^n+2^n+3^n+\cdots+(p-1)^n$. Mostra que se $p-1$ divide n então $S \equiv -1 \pmod p$, e que se $p-1$ não divide n então p divide S.

435. Mostra que o menor inteiro positivo $k \geq 2$ tal que existam inteiros $m, n, a \geq 1$ que satisfazem $1324 + 279m + 5^n = a^k$ é 3.

436. Sejam $a_1, \ldots, a_n; b_1, \ldots, b_n$ reais positivos. Mostra que então
$$\left(\frac{b_1}{a_1}\right)^{a_1} \cdot \left(\frac{b_1}{a_1}\right)^{a_1} \cdot \cdots \cdot \left(\frac{b_1}{a_1}\right)^{a_1} \leq \left(\frac{b_1+b_2+\cdots+b_n}{a_1+a_2+\cdots+a_n}\right)^{a_1+a_2+\cdots+a_n} .$$

437. Seja $\{n_j\}_{j\geq 0}$ uma sucessão de inteiros positivos distintos tal que para certas constantes C e L se tem $n_j \leq Cj^L$ para quase todos os j. Mostra que de entre os divisores dos n_j existem infinitos primos.

438. Uma circunferência $\mathcal{C} = \mathcal{C}(O, *)$ toca os lados AB e AC de um triângulo $\triangle = \triangle ABC$ em E e F. A perpendicular por O a BC intersecta EF em D. Mostra que $M = AD^+ \cap BC$ é o ponto médio de BC.

439. Mostra que a equação $x^2 + y^2 + z^2 = 7$ não tem soluções racionais. Deduz desse facto a inexistência de soluções racionais da equação $x^2 + y^2 + z^2 + x + y + z = 1$.

440. À volta de uma mesa redonda jantam 10 casais. De quantas formas diferentes se podem sentar os comensais de forma a que os membros de cada casal estejam em posições adjacentes.

441. Encontra todos os inteiros positivos que são múltiplos do número que resulta do apagamento do seu último dígito.

442. Mostra que o número $\underbrace{10101\cdots101}_{n\ 1's}$ só é primo quando $n = 2$.

443. Mostra que, para todo o inteiro positivo n, a fracção $\dfrac{21n+4}{14n+3}$ é irredutível.

444. Cada uma das linhas duma tabela $2 \times 2n$ contém os inteiros $1, 2, 3, \ldots, 2n$, mas nenhuma coluna tem dois inteiros iguais. Dois indivíduos A, B seleccionam alternadamente nas linhas $1, 2$ o maior dos inteiros que esteja numa coluna ainda não visitada.

É verdade ou não que, seja qual for a tabela, ambos os jogadores vão seleccionar números cuja soma é pelo menos igual a metade de $\displaystyle\sum_{i=1}^{2n} i$?

445. O *vector-soma-linhas* de uma matriz $m \times n$ é o m-uplo das somas das linhas $1, 2, \ldots, m$.
O *vector-soma-colunas* define-se de forma análoga. A matriz que apresentamos como exemplo, tem vector-soma-linhas $\boldsymbol{r} = (6, 7, 8)$ e vector-soma-colunas $\boldsymbol{c} = (5, 2, 7, 7)$.
$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$
O *conjugado* $\boldsymbol{u}^* = (u_1^*, u_2^*, \ldots)$ de um n-uplo de inteiros não negativos define-se por $u_j^* = |\{i : u_i \geq j\}|$.
Por exemplo $\boldsymbol{r}^* = (3, 3, 3, 3, 3, 3, 2, 1)$.

Sejam m, n inteiros positivos e $\boldsymbol{r} = (r_1, r_2, \ldots, r_m)$, $\boldsymbol{c} = (c_1, c_2, \ldots, c_n)$-uplos de inteiros não-negativos. Mostra que existe uma matriz $m \times n$ de 0's e 1's com vector-soma-linhas $\boldsymbol{r}$ e vector-soma-colunas $\boldsymbol{c}$ se, e

somente se, $\boldsymbol{c} \preceq \boldsymbol{r}^*$.
(Aqui $\preceq$ significa a majoração conhecida, por exemplo, da *desigualdade de Muirhead*.)

446. Seja (a_n) uma sucessão cujo primeiro elemento é 1 e o terceiro é 2, ou seja,

$$1, a, 2, b, c, d, \ldots$$

e, que a partir do terceiro termo inclusive todos os elementos são dados pela média aritmética dos anteriores. Qual o $2010^{\underline{o}}$ elemento da sucessão?

447. No "Casino do Azar", as trocas comerciais só podem ser feitas com os dois únicos tipos de fichas fornecidos pelo casino, as fichas de 26 euros e as fichas de 10 euros. É possível comprar, pelo seu valor exacto, uma bebida no bar do casino que custe 2 euros? E uma refeição por 7 euros? No caso afirmativo, explica como é que se faz a compra.

448. Mostra que o número $6666666^{7777777} + 8888888^{7777777}$ é múltiplo de 7777777.

449. Mostra que a equação $7x^3 + 2 = y^3$ não tem soluções em números inteiros.

450. Para definir o conjunto $\mathcal{P}(P_0)$ das *fórmulas proposicionais* sobre P_0 (fórmulas lógicas tais como $((\neg r) \vee q)$, $((q \vee q) \wedge r)$, $((p \to (q \wedge r)) \vee q)$, etc.) usa-se definição indutiva. Fixa-se um conjunto P_0 (de *variáveis proposicionais*), por exemplo $P_0 = \{p, q, r\}$, e um conjunto de *conectivos lógicos*, por exemplo, $\{\to, \vee, \wedge, \neg\}$. Depois formam-se indutivamente para $k = 0, 1, 2, \ldots$ os conjuntos

$$P_{k+1} := P_k \cup \{(A \diamond B) : A, B \in P_k,\ \diamond \in \{\to, \vee, \wedge\}\} \cup \{(\neg A) : A \in P_k\}\,.$$

O conjunto $\mathcal{P}(P_0)$ é, por definição, a união de todos os conjuntos P_k.

a) Escreve para $P_0 = \{p, q\}$ todas as fórmulas de P_1, e para $P_0 = \{p, q, r, s\}$ algumas das fórmulas em $P_2 \setminus P_1$.
b) Se $P_0 = \{p, q, r, s\}$, qual o menor k tal que P_k contém a fórmula $(((p \to ((\neg q) \wedge r)) \vee q) \wedge (s \to q))$?
c) Pondo $p_k = |P_k|$, $k = 0, 1, 2, 3, \ldots$, desenvolve com justificação uma fórmula para calcular p_k recursivamente.

451. Mostra que a ordem lexicográfica em $\mathbb{Z}^n_{\geq 0}$ (ver o problema C2 no verso) está bem-fundamentada, i.e. não existem sucessões infinitas $a^0 >_{\text{lx}} a^1 >_{\text{lx}} a^2 >_{\text{lx}} a^3 >_{\text{lx}} \cdots$ de elementos a^i em $\mathbb{Z}^n_{\geq 0}$. (Os i nos a^i são índices; $b >_{\text{lx}} a$ é o mesmo que $a <_{\text{lx}} b$.)

452. Seja (F_n) a *sucessão de Fibonacci*, i.e. $F_1 = F_2 = 1$ e $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n,\ n \in \mathbb{N}$.

Encontra todos os $(m, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ tais que $F_m\, F_n = m\, n$.

453. Somam-se todos os dígitos do número 2^{2010}. De seguida, somam-se todos os dígitos no número resultante, e repete-se este processo até que se obtém um número de um único dígito. Que número é esse?

454. Um inteiro positivo n diz-se *poderoso* se $p^2|n$ para todo o factor primo p de n. Mostra que se n for poderoso então pode ser escrito na forma $n = a^2\, b^3$, com a e b inteiros positivos.

455. Encontra todos os inteiros positivos d tais que d divide $n^2 + 1$ e $(n + 1)^2 + 1$ para algum inteiro n.

456. Seja $S = (S, \cdot)$ um semigrupo finito. Mostra que S tem um elemento idempotente.

457. Seja $S = (S, \cdot)$ um conjunto munido de uma operação binária $\cdot : S \times S \to S$. Um subconjunto E de S diz-se *conjunto gerador* de S se a família de todos os produtos de elementos de E, tais como
$(\ell_1\,\ell_1)(\ell_2\,\ell_3), (\ell_1(\ell_1\,\ell_2))\ell_3, \ell_1((\ell_1\,\ell_1)\ell_1)$, etc. com $\ell_1, \ell_2, \ell_3 \in E$ for igual a S.
Demonstra a correcção do teste de associatividade de F.W. Light, que afirma o seguinte:
Se para todos os $s, s' \in S$ e $\ell \in E$ se tem $(s\,\ell)s' = s(\ell\,s')$, então $(S, \cdot)$ é semigrupo.

458. Sejam a, b, c inteiros não nulos tais que $a/b + b/c + c/a$ e $a/c + b/a + c/b$ são inteiros. Prova que $|a| = |b| = |c|$.

459. Mostra que se a e b são inteiros positivos primos entre si, então existem inteiros positivos m e n tais que $a^m + b^n \equiv 1 \pmod{ab}$.

460. Mostra que se n é um inteiro maior do que 1 então n não divide $2^n - 1$.

461. Sejam $\{a_1, a_2, \ldots, a_{101}\}$ e $\{b_1, b_2, \ldots, b_{101}\}$ sistemas completos de restos módulo 101. Verifica se $\{a_1b_1, a_2b_2, \ldots, a_{101}b_{101}\}$ é um sistema completo de restos módulo 101.

462. Prova que para todos os $a, b, c \in \mathbb{R}$, com $a, b, c \geq 0$, se tem $(a+b)(a+c) \geq 2\sqrt{a\,b\,c\,(a+b+c)}$.

463. Sejam $\triangle ABC$ um triângulo, e $E, F \in AB$ dois pontos tais que $|AE| = |EF| = |FB|$. Seja ainda D o pé da perpendicular por E à recta g_{BC}.
Supondo $AD \perp CF$ e $3 \cdot B\hat{D}F = C\hat{F}A$ calcula a razão $|BD| : |DF|$.

464. Quantos números de 3 dígitos têm dígitos cujo produto dê 24?

465. Sejam n, k inteiros positivos com k menor ou igual a n. Sejam S um conjunto contendo n números reais diferentes e T o conjunto dos números da forma $x_1 + x_2 + \cdots + x_k$ onde $x_1, \ldots, x_k$ são elementos distintos em S.
Prova que T contém pelo menos $k\,(n-k)+1$ elementos distintos.

466. Encontra todos os pares de algarismos que permitem preencher os espaços no número 30_0_03 de modo que este seja divisível por 13.

467. Determina um inteiro x entre 1 e 49 tal que $x^{17} \equiv 2 \pmod{49}$.

468. Determina o número de soluções da congruência $x^2 \equiv 1 \pmod{2^{\mathrm{d}}\,3^{\mathrm{e}}\,25^{\mathrm{l}}\,49^{\mathrm{f}}\,5^{\mathrm{o}}\,7^{\mathrm{s}}}$, onde $\mathrm{d, e, l, f, o, s}$, são inteiros positivos.

469. Numa festa toda a mulher dança com algum homem mas nenhum homem dança com todas as mulheres. Mostra que existem homens h_1, h_2 e mulheres m_1, m_2 tais que h_1 dança com m_1, e h_2 com m_2, mas h_1 não dança com m_2 nem h_2 dança com m_1.

470. Sejam A, B pontos de uma recta g. Introduz no mesmo g-semiplano duas semirectas ℓ_1, ℓ_2 com origem em A tal que ℓ_1 divide o menor dos ângulos entre g e ℓ_2. Escolhe um ponto $P \in \ell_2$. Para um ponto $X \in AB$ introduz sucessivamente os pontos seguintes: $S = XP \cap \ell_1$, $U = PB \cap \ell_1$, $W = BS^+ \cap \ell_2$, $Y = WU^+ \cap g$.

Demonstra que a posição de Y não depende das escolhas de ℓ_1, ℓ_2, e P, mas só de A, B, X. O ponto Y assim construído diz-se o *conjugado harmónico* de X relativamente a AB.

471. Seja G o grafo cujo conjunto conjunto dos vértices V é $V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ e o conjuntos das arestas $A = \{\{1, 2\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{2, 5\}, \{2, 7\}, \{3, 4\}, \{3, 6\}, \{4, 5\}, \{4, 7\}, \{5, 6\}, \{6, 7\}\}$.

   a. Existe algum caminho que passe por todas as arestas uma e apenas uma única vez?

   b. Será possível desenhar o grafo no plano de forma a que 2 arestas não incidentes não se intersectem?

472. Seja n um inteiro positivo divisível por 24. Mostra que a soma dos divisores positivos de $n - 1$ (incluindo 1 e $n - 1$) é também divisível por 24.

473. Enuncia e prova o critério da divisão por 11. Deduz que todo o número palíndromo com um número par de dígitos (eventualmente repetidos) é divísivel por 11 (um número *palíndromo*, ou *capicua*, é um número que é lido da esquerda para a direita da mesma forma que é lido da direita para a esquerda: por exemplo, 732237 é um número palíndromo).

474. Num sistema bancário de identificação utilizam-se números de nove dígitos $a_1a_2 \cdots a_8a_9$:
$$a_9 \equiv 7a_1 + 3a_2 + 9a_3 + 7a_4 + 3a_5 + 9a_6 + 7a_7 + 3a_8 \pmod{10}.$$
   Determina o dígito rasurado ■ da conta bancária 237■18538.

475. Mostra que 2^n divide N se e só se 2^n divide o número formado pelos últimos n dígitos de N, quaisquer que sejam os inteiros positivos n e N.

476. a. Mostra que a equação diofantina $x^2 + 4y^2 = 229z^3$ tem infinitas soluções e determina o conjunto das soluções da equação $x^2 + 4y^2 = 23z^3$.

   b. Supõe que a equação diofantina $x^3 = a + my$, $a, m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ é solúvel. Mostra que então tem infinitas soluções.

477. Seja $p = 4k + 1$, $k \in \mathbb{Z}$ um primo, e $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{Z}^3_{\geq 1} : x^2 + 4yz = p\}$. Mostra sucessivamente o seguinte:

   a. As expressões abaixo definem uma aplicação involutiva $\varphi : S \to S$.
$$(x, y, z) \overset{\varphi}{\mapsto} \begin{cases} (x + 2z, z, y - x - z) & \text{se } x < y - z \\ (2y - x, y, x - y + z) & \text{se } y - z < x < 2y \\ (x - 2y, x - y + z, y) & \text{se } x > 2y \end{cases}.$$

   b. Esta involução tem exactamente um ponto fixo. Expressa-o somente em termos de k e de outros inteiros.

   c. O número de pontos fixos de uma involução num conjunto finito tem a paridade da cardinalidade do conjunto.

   d. Há uma outra involução óbvia em S. Qual a sua fórmula?

   e. Infere o teorema de Fermat-Euler que todo o primo $p \in 4\,\mathbb{Z} + 1$ é soma de dois quadrados.

478. a. Prova que para todo n, k inteiros positivos com $n \geq k$ se tem $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$.

   b. Prova que para todo n inteiro positvo se tem $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$.

479. Considerem-se os pontos de coordenadas inteiras no plano. Desenhando uma circunferência com centro em $(0, 0)$ e raio r, essa circunferência intersecta alguns desses pontos. Por exemplo, para $r = 2\sqrt{2}$ a

circunferência intersecta 4 desses pontos. Prova que para todo n existe um r tal que a circunferência de raio r intersecta n pontos.

480. Enuncia o Pequeno Teorema de Fermat e calcula o resto da divisão de $245^{100} + 102^{2011} - 909^{33}$ por 101.

481. Seja p um inteiro maior do que 1 tal que, para qualquer inteiro a que não é divísivel por p, se tem $a^{p-1} \equiv 1 \pmod p$. Mostra que p é primo.

482. O Francisco tem muitos bombons de marca "Pequeno bombom", cada um dos quais custa 17 cêntimos. O Roberto tem muitos bombons de marca "Grande bombom", cada um dos quais custa 61 cêntimos. O Francisco e o Roberto querem efectuar uma troca de bombons. Quantos bombons o Francisco deve dar ao Roberto, e quantos o Roberto deve dar ao Francisco, de modo a que o prejuízo do Francisco seja mínimo? E qual a resposta quando se quer que seja o Roberto a ter um prejuízo mínimo?

483. Mostra que se uma sucessão $e_0 = 1, e_1, \ldots, e_n$ de reais positivos satisfaz $e_i^2 \geq e_{i-1}\, e_{i+1}$ para $i = 1, 2, \ldots, n-1$, então também satisfaz $e_1 \geq e_2^{1/2} \geq e_3^{1/3} \geq e_4^{1/4} \geq e_5^{1/5} \geq \cdots \geq e_n^{1/n}$.

484. a. Seja p primo e $\mathbb{Z}_p^*$ o subgrupo multiplicativo do corpo $(\mathbb{Z}_p, +, \cdot)$. Mostra que $H = \{x^m : x \in \mathbb{Z}_p^*\}$ é um subgrupo de $\mathbb{Z}_p^*$. Observa que as classes laterais de H em $\mathbb{Z}_p^*$ definem uma "coloração" de $\mathbb{Z}_p^*$.
b. Utiliza o teorema de Ramsey para obter que, dado um qualquer inteiro $m \geq 1$, existem um primo p suficientemente grande e $a, b, c \in \mathbb{Z}_p^*$ com a mesma "cor" tais que $a + b = c$.
c. Deduz que para qualquer inteiro m existe um primo p tal que $x^m + y^m = z^m \quad \text{em} \quad \mathbb{Z}_p$.
d. Formula o "último teorema de Fermat" e discute a relevância do resultado anterior, provado por Issai Schur em 1916, em abordagens a este teorema.

485. Mostra que para todo o inteiro a, $3a^2 - 1$ nunca é um quadrado perfeito.

486. Um número diz-se *triangular* se for a soma de inteiros consecutivos, começando no 1.
a. Mostra que se t_n é o n-ésimo número triangular então t_n pode escrever-se na forma:
$$t_n = \binom{n+1}{2} = \frac{n(n+1)}{2}, n \geq 1.$$
b. Mostra que se $s > 2$ é um inteiro, então a equação $\dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2} + \cdots + \dfrac{1}{x_s} = 1$ tem uma solução dada por números triangulares.

487. a. Determina as soluções da equação diofantina $x^2 + y^2 = 3z^2$.
b. Determina as soluções da equação diofantina $1 + 2x + 4y + 5x^2 + 5y^2 = z^2$.

488. Um tabuleiro 4×4 tem, inicialmente, as suas 16 casas pintadas de branco. É permitida uma operação que consiste em escolher um rectângulo formado por 3 casas e trocar a cor de cada uma das 3 casas: as casas brancas pintam-se de preto e as casas pretas pintam-se de branco. Será possível, aplicando várias vezes a operação permitida, ficar com o tabuleiro todo pintado de preto?

489. Encontra todas as funções $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tais que $\forall n,\ f(n+1) > f(f(n))$.

490. Dados três pontos colineares A, B, X, definimos um ponto Y como sendo o resultado do seguinte processo:
· Seja g a recta que passa por A, B, X.

· Introduz no mesmo g-semiplano duas semirectas ℓ_1, ℓ_2 com origem em A tal que ℓ_1 divide o menor dos ângulos entre g e ℓ_2.
· Escolhe um ponto $P \in \ell_2$.
· Define sucessivamente os pontos $S = XP \cap \ell_1, \quad U = PB \cap \ell_1, \quad W = BS^+ \cap \ell_2$.
· Põe $Y = WU^+ \cap g$.
a. Demonstra, com base em geometria projectiva, que Y não depende das escolhas de ℓ_1, ℓ_2 e P, mas só de A, B, X.
Neste sentido podemos dizer que o processo acima é um algoritmo a que vamos designar por $H(\cdots)$ (para abreviar "harmónico de") que, quando alimentado com o "input" A, B, X produz como "output" um ponto Y na recta definida por A, B, X, i.e. $Y = H(A, B, X)$.
b. Demonstra também que $Y = H(A, B, X)$ *implica* $Y = H(B, A, X)$ *e* $X = H(A, B, Y)$.

491. Considera 2009 moedas, cada uma com uma "cara" e uma "coroa", numa fila. Inicialmente todas as moedas têm a "cara" virada para cima. Dois jogadores que se encontram do mesmo lado da fila de moedas jogam alternadamente. Cada jogada consiste na escolha de um bloco de 50 moedas consecutivas, em que a moeda mais à esquerda das escolhidas tem a "cara" virada para cima, e em virar todas as moedas escolhidas de modo a que as que têm a "cara" virada para cima passem a ter "coroa" e as que têm "coroa" virada para cima passem a ter "cara". O último jogador que conseguir efectuar uma jogada ganha.
a. Prova que o jogo tem necessariamente de acabar.
b. Existe alguma estratégia vencedora para o primeiro jogador?

492. Determina todos os inteiros positivos n tais que $n+1$ divide n^2+1.

493. Supõe que n é um inteiro ímpar que não é múltiplo de 5. Mostra que existe um múltiplo de n cujos algarismos são todos iguais a 1.

494. Seja r um inteiro. Sejam $a_1, a_2, \ldots, a_{2n}$ inteiros distintos tais que $(r-a_1)(r-a_2)\cdots(r-a_{2n}) - (-1)^n(n!)^2 = 0$, onde n é um inteiro positivo e $n! = n \times \cdots \times 1$. Mostra que $r = \dfrac{a_1 + a_2 + \cdots + a_{2n}}{2n}$.

495. Seja $\triangle = \triangle ABC$ um triângulo não-isósceles e $D \in BC, E \in CA, F \in AB$ os pontos de tangência da circunferência inscrita com os lados de $\triangle$. Definem-se os pontos $U = g_{FD} \cap g_{CA}, V = g_{DE} \cap g_{AB}, W = g_{EF} \cap g_{BC}$, e $L = \text{médio}(DW), M = \text{médio}(EU), N = \text{médio}(FV)$. Mostra que L, M, N são colineares.

496. Dada uma sucessão (a_n) de complexos define-se a sucessão das suas primeiras diferenças (d_n) por $d_n = \Delta a_n = a_{n+1} - a_n$. Este processo pode ser repetido: podemos considerar as primeiras diferenças de d_n que são chamadas segundas diferenças de a_n, etc. Seja $k \geq 1$ um inteiro. Mostra que a sucessão das k-esimas diferenças da sucessão (n^k) é uma sucessão constante. Qual o valor desta constante?

497. Mostra que existem exactamente $\binom{k}{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor}$ uplos $a = (a_0, \ldots, a_k)$ de números inteiros não--negativos com $a_0 = 0$ que satisfazem $|a_i - a_{i+1}| = 1$ para $i = 0, 1, \ldots, k-1$.

498. a. Os números $1, 2, \ldots, 20$ estão escritos num quadro. É permitido o seguinte procedimento: *apagar dois números* $\boldsymbol{a}$ *e* $\boldsymbol{b}$ *e substituí-los pelo número* $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} - 1$. Qual é o número que fica escrito no quadro após 19 aplicações desse procedimento?

b. E se o procedimento fosse: *apagar dois números* $\boldsymbol{a}$ *e* $\boldsymbol{b}$ *e substituí-los pelo número* $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\,\boldsymbol{b}$. Qual era o número que ficava escrito no quadro após 19 aplicações desse procedimento?

499. Determina todos os inteiros $n > 1$ tais que qualquer divisor primo de n^6-1 é um divisor de $(n^3-1)(n^2-1)$.

500. Determina todos os triplos (p, q, r) de primos distintos tais que $p|q^r + 1$, $q|r^p + 1$ e $r|p^q + 1$.

501. Encontra todos os pares de primos (p, q) tais que $p\,q|5^p + 5^q$.

502. Sejam x e y inteiros positivos tais que x^2-y^2 é positivo, múltiplo de 2011 e tem exactamente 2011 divisores primos. Quantos são os pares ordenados (x, y) que verificam tais condições?

503. As rectas AP, BP e CP intersectam os lados do triângulo ABC (ou o seu prolongamento) nos pontos A_1, B_1 e C_1, respectivamente. Mostra que:
a. as rectas que passam pelos pontos médios dos lados BC, CA e AB paralelas às rectas AP, BP e CP, respectivamente, intersectam-se num ponto.
b. as rectas que ligam os pontos médios dos lados BC, CA e AB aos pontos médios dos segmentos AA_1, BB_1 e CC_1, respectivamente, intersectam-se num ponto.

504. Mostra que se tem a identidade $$\sum_{\substack{l_1+2l_2+\cdots+nl_n=n \\ l_1\geq 0,\ldots,l_n\geq 0}} \frac{(-1)^{l_2+l_4+\cdots+l_{2\lfloor \frac{n}{2}\rfloor}}}{l_1!\,l_2!\,\cdots\,l_n!\,1^{l_1}\,2^{l_2}\,\cdots\,n^{l_n}} = 0\,.$$

505. Dois números dizem-se *amigáveis* se a soma dos divisores (excluindo o próprio) de cada um deles for igual ao outro. No século IX o matemático árabe Thâbit ben Korrah descobriu que os números $2^k ht$ e $2^k s$ são amigáveis quando $h = 3\cdot 2^k - 1$, $t = 3\cdot 2^{k-1} - 1$ e $s = 9\cdot 2^{2k-1} - 1$ são primos superiores a 2. Prova que assim é, e dá um exemplo de pares de números amigáveis.

506. Determina o número de pares ordenados (x, y) de inteiros positivos que são solução da equação $1/x + 1/y = 1/(73\times 5^{2011})$.

507. Considera a sucessão de números reais, (a_n), tal que $a_0 = 3$ e $(3 - a_{n+1})(6 + a_n) = 18$. Determina, em função de n, a soma $1/a_0 + 1/a_1 + \cdots + 1/a_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} 1/a_k\,.$

508. Determinar todos os pares (n, k) de inteiros positivos tais que $n^k\,k! = k^n\,n!$.

509. Encontra pelo menos dois 4-uplos, (a, b, c, d), (a', b', c', d'), de funções, não nulas e não múltiplas, i.e. $a = a(r, t)$, $b = b(r, t)$, $c = c(r, t)$, $d = d(r, t)$, $a' = a'(r, t)$, $b' = b'(r, t)$, $c' = c'(r, t)$, $d' = d'(r, t)$ tais que não existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $(a, b, c, d) = \lambda\,(a', b', c', d')$, de modo que a equação
$$a + (2r + t)\cdot b + r(r + 2t)\cdot c + (r^2 t)\cdot d = 0$$
seja satisfeita para todos os r, t reais.

510. Sejam $x_1, x_2, \ldots, x_n$ reais distintos. Considera $S = S(x_1, \ldots, x_n) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left((1 + x_k^2)^{n/2} \Big/ \prod_{j\neq k} |x_k - x_j|\right)$.
Prova que $S \geq n$. Quando é que $S = n$?

511. Considera a sucessão $a_0, a_1, \ldots, a_{2011}$ verificando:
(*) $0 \leq a_n \leq 1, n \geq 0$; (**) $a_n \geq (a_{n-1} + a_{n+1})/2, n \geq 1$.
Mostra que $a_{2011} - a_{2010} \leq 1/2011$, e determina uma sucessão (a_n) satisfazendo (*) e (**) tal que $a_{2011} - a_{2010} = 1/2011$.

512. Encontra, usando o teorema de Pick, o número de soluções inteiras, $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$, do sistema de inequações:
$$101x + 1102 < y < 2011\,, \quad x > 0\,.$$

513. Num tabuleiro 8×8 retiram-se 2 cantos opostos. É possivel cobrir as 62 casas restantes com peças 2×1, colocadas horizontal ou verticalmente?

514. Para cada inteiro positivo n, seja $a(n)$ o produto dos algarismos de n. Determina todas as soluções da equação $n^2 - 17n + 56 = a(n)$.

515. Sejam $n \geq 2$ e $b_1, b_2, \ldots, b_n \in \mathbb{R}_{>0}$, $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$. Considera para $\mu \in \mathbb{R}$ o polinómio homogéneo
$$E(\underline{x}) = b_1\, x_1^{2d} + \cdots + b_n\, x_n^{2d} - \mu\, x_1^{a_1} \cdots x_n^{a_n}.$$
Define ainda $\mu_0 = 2d \prod_{i=1}^{n} \left(\frac{b_i}{a_i}\right)^{a_i/2d}$.
Mostra que se $|\mu| \leq \mu_0$, então $E(\underline{x}) \geq 0$ para todos os $\underline{x} \in \mathbb{R}^n$.

516. Mostra que se $a_1, a_2, \ldots, a_n$ é uma sucessão de $n \geq 5$ reais de soma zero, então
$$\sum_{i=1}^{n} a_i^5 = 5 \sum_{1\leq i<j<k<l<m\leq n} a_i a_j a_k a_l a_m - 5 \sum_{1\leq i<j\leq n} a_i a_j \sum_{1\leq i<j<k\leq n} a_i a_j a_k.$$

517. Indica todos os pares (r, s) tais que num tabuleiro $r \times s$, há tantas casas exteriores como interiores.

518. Indica todos os pares (r, s) tais que $(rs)^2 - 4(r + s)$ é um quadrado perfeito.

519. Mostra que $\sum_{d^2|n} \mu(d) = \mu^2(n)$, onde μ é a função de Möbius e n é um inteiro positivo qualquer.

520. Determina todas as soluções (p, n) da equação $n^3 = p^2 - p - 1$, onde p é um número primo (positivo) e n é um inteiro.

521. Explicita o termo geral de (a_n) definida, por recorrência, da seguinte forma: $\begin{cases} a_0 = 1, a_1 = 4 \\ a_{n+2} = 3a_{n-1} - 2a_{n-2} \end{cases}$.

522. Prova, usando funções geradoras, que, para todo $n \in \mathbb{N}$ $\binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \cdots + \binom{n}{n}^2 = \binom{2n}{n}$.

523. Seja $m \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$. Demonstra a desigualdade $\displaystyle\sum_{\substack{j+k=m,\\ j,k\geq 1}} \frac{\prod_{l=1}^{j-1}(1-\frac{1}{3l})}{j}\,\frac{\prod_{l=1}^{k-1}(1-\frac{1}{3l})}{k} \leq 6 \cdot \frac{\prod_{l=1}^{m-1}(1-\frac{1}{3l})}{m}$.
Nota: Produtos 'vazios' tais como $\prod_{l=1}^{0}$ ..., etc. são habitualmente interpretados como sendo iguais a 1.

524. Sejam E, F, G, H, I, R, T, V $\in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. Verifica se a seguinte operação é possível:
$$\begin{array}{cccccc} & T & H & R & E & E \\ + & & F & I & V & E \\ \hline & E & I & G & H & T \end{array}$$

525. Prova que não existe nenhum inteiro positivo n tal que $2^n + 1$ seja divisível por 7.

526. Prova que para a, b, c reais positivos se tem: $a^2(b+c-a)+b^2(c+a-b)+c^2(a+b-c) \le 3\,a\,b\,c$.

527. Um paralelogramo pode ser dividido num qualquer número par de triângulos de igual área. Explica como.

528. Com quantos algarismos iguais a zero o número $2011! = 2011 \times 2010 \times 2009 \times \cdots \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$ termina?

529. Considera a recorrência $t_n = a\,t_{n-1} + b\,n$, $n \ge 1$, onde a, b são constantes.

a. Supõe $t_0 = 0$, $t_1 = 1$ e constrói uma fórmula para t_n usando sumatórios.

b. Dá uma fórmula explícita para t_n com não mais que 30 símbolos, todos retirados do alfabeto $\{a, b, n, +, -, \cdot, /, (,), 1, 2, 3, 4\}$.

530. a. Queremos construir uma caixa rectângular fechada cujas arestas são fabricadas usando um arame de comprimento $64\,\text{cm}$. A caixa deve ter uma superfície de $166\,\text{cm}^2$, e um volume de $140\,\text{cm}^3$. Quais são as medidas desta caixa rectângular?

b. Se o arame tivesse apenas $60\,\text{cm}$, sería ainda possível construir uma caixa com a mesma superfície e o mesmo volume que a anterior?

531. Determina todos os pares de inteiros positivos (x, y) tais que $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{1}{5}$.

532. Determina os números inteiros positivos n para os quais a equação $3x^2 + 2nx + 3 = 0$ tem soluções inteiras.

533. Sabendo que o número A1996B é divisível por 99, determina A, B.

534. Seja p um polinómio de grau 3, com zeros r_1, r_2, r_3. Supondo que $\dfrac{p(1/2)+p(-1/2)}{p(0)} = 1000$, determina $\dfrac{1}{r_1 r_2} + \dfrac{1}{r_1 r_3} + \dfrac{1}{r_2 r_3}$.

535. Mostra que a successão recorrente definida por $x_{k+1} = x_k \left(\dfrac{k}{2+k} + x_k \right)$, para $k \ge 0$, converge de forma decrescente para 0 para todo o valor inicial $x_0 \in [0, 1/4]$.

536. a. Enuncia as leis de distributividade de conjuntos e aplica-as para transformar passo a passo a expressão $(A_1 \cup A_2 \cup A_3) \cap (B_1 \cup B_2)$ numa união de conjuntos da forma $A_i \cap B_j$.

b. Sejam $I = \{3, 4, 6\}$, e $J = \{1, 2, 4\}$. Escreve a expressão $\displaystyle\bigcap_{j \in J} \left(\bigcup_{i \in I} A_{ij} \right)$ numa forma em que apenas constem as letras A_{ij}, $\cap, \cup$, e parêntesis.

c. i. Expressa o conjunto $A = \displaystyle\bigcap_{r>0} \,]0, r[$ em termos mais simples.

ii. Representa o seguinte conjunto no plano: $\left(\displaystyle\bigcap_{r>0.7} [0.1, r[\times \bigcup_{1 \ge r > 0} \{r\} \right) \cup (\{2, 2.5\} \times \{3, 5\})$.

d. Seja $f : X \to Y$ uma função, $X \ne \varnothing$ e $Y' \subseteq Y$.

i. Mostra que $f^{-1}(Y \setminus Y') = X \setminus f^{-1}(Y')$.

ii. Mostra que f é injectiva se, e somente se, existir uma aplicação $g_1 : Y \to X$ tal que $g_1 \circ f = 1_X$;

iii. Mostra que f é sobrejectiva se, e somente se, existir uma aplicação $g_2 : Y \to X$ tal que $f \circ g_2 = 1_Y$.

537. Num saco estão 90 bolas numeradas de 1 a 90. 33 pessoas tiram uma bola cada. Mostra que há pelo menos duas pessoas cujas bolas diferem por 4 ou por 8.

538. $[ABCD]$ é um trapézio de bases $AB = 2$ e $CD = 1$. Se $\angle BAD = 40°$ e $\angle CDA = 50°$ qual a distância entre os pontos médios das bases?

539. Numa conferência internacional participaram 241 jovens cientistas de 6 países diferentes. Dado o elevado número de participantes a organização decidiu alojá-los em 4 hotéis. Entre quaisquer 6 participantes existem 2 com a mesma idade. Mostra que num dos hotéis estavam alojados três cientistas do mesmo país com a mesma idade.

540. Determina todos os números primos p e q, para os quais os q números, $p, p+q+1, p+2(q+1), \ldots,$ $p+(q-1)(q+1)$ são primos.

541. Determina os números racionais não nulos q tais que $q + \dfrac{1}{q}$ é um inteiro.

542. Determina o mais pequeno inteiro positivo que é múltiplo de 2011 e cujos quatro últimos dígitos são iguais a 9.

543. Sejam $a_1, a_2, \ldots, a_n$ inteiros positivos e $M = \max_i a_i$. Define um grafo bipartido $G = G(V_1 \uplus V_2, E)$ com $V_1 = \{1, 2, \ldots, n\}$, $V_2 = \{1', 2', \ldots, M'\}$, e $\{i, j'\} \in E$ se, e somente se, $j \leq a_i$.

a. Quais os graus dos vertices em V_1 e V_2, e que identidade podemos deduzir disto, usando o princípio da contagem dupla?

b. Sejam p primo, e d, k inteiros, $k \geq 1$. Para o número primo p e o número inteiro s, seja $\log_p(s) := \max\{k : p^k | s\}$. Sendo $(d + jk)_{j=1}^n$ uma progressão aritmética, deduz para o caso $p \perp k$ uma fórmula para $\log_p(\prod_{j=1}^n (d + jk))$ que no caso $d = 0, k = 1$ se reduza a um facto bem conhecido.

544. Num reticulado quadrático $\{0, 1, 2, \ldots, 2n\} \times \{0, 1, 2, \ldots, 2n\}$ consideramos caminhos definidos por sucessões de pares $(0, 0) = (i_0, j_0), (i_1, j_1), \ldots, (i_{2n}, j_{2n}) = (2n, 2n)$ tal que para cada $k = 1, 2, \ldots, 2n$, $(i_k, j_k) - (i_{k-1}, j_{k-1}) \in \{(1, 0), (0, 1)\}$.
(Estes caminhos começam então no vértice inferior esquerdo e acabam no vértice diagonalmente oposto; cada ponto é obtido do seu predecessor indo um passo para "Leste" ou para "Norte" pelo que podem ser indicados por palavras em L e N tais como LNNLLN. . ..)

Um tal caminho é um i-*caminho* se evitar os pontos **í**mpares $(1, 1), (3, 3), \ldots, (2n-1, 2n-1)$ da diagonal, e é um a-*caminho* se evitar pontos **a**cima da diagonal (que consiste nos pontos $(0, 0), (1, 1), \ldots, (2n, 2n)$). Constrói uma bijecção entre as famílias, I, dos i-caminhos e, A, dos a-caminhos.

545. Seja $p(x)$ um polinómio não constante de coeficientes inteiros. Sejam a e b inteiros tais que $p(a) - p(b) = 1$. Mostra que $|a - b| = 1$.

546. Sejam a e b números inteiros positivos tais que $(a + 1)/b + (b + 1)/a$ é inteiro. Mostra que o máximo divisor comum de a e b não é maior do que $\sqrt{a + b}$.

547. Seja ζ a função zeta de Riemann definida nos números reais maiores que 1 pela fórmula: $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$. Estima o valor de $\zeta(3/2)$.

548. Mostra que o número de linhas necessárias no algoritmo euclideano para encontrar o máximo divisor comum de dois inteiros positivos não excede cinco vezes o número de digitos do menor dos dois inteiros dados.

549. Considera um hexágono regular de lado 1. Determina o maior número inteiro, n, para o qual existem n pontos no interior ou sobre os lados do hexágono dado, cuja distância entre quaiquer dois deles é pelo menos $\sqrt{2}$.

550. Num tabuleiro com $\boldsymbol{a}$ linhas e $\boldsymbol{b}$ colunas, cada casa tem um interruptor e uma lâmpada apagada. Premindo o interruptor de uma casa, a lâmpada que se encontra nessa casa muda de estado, juntamente com as lâmpadas que se encontram na mesma linha e com as que se encontram na mesma coluna (as que se encontram acesas apagam-se e as que se encontram apagadas acendem-se). Para que valores de $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{b}$ é possível ficar apenas com uma lâmpada acesa, premindo uma série de interruptores?

551. Estabelece uma fórmula recursiva para calcular o número de triangulações diferentes de um n-ágono convexo. Usa essa fórmula para calcular o número de triangulações diferentes de um octógono convexo.

552. Mostra que todo o polígono convexo pode ser inscrito num triângulo ou num paralelogramo, de tal forma que todos os lados do triângulo ou do paralelogramo contenham lados do polígono.

553. Sejam $p, q \in \mathbb{Z}[x]$. Mostra que, se $p(a)|q(a)$ para infinitos inteiros a, então existe um $m \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ tal que $p|mq$ em $\mathbb{Z}[x]$. Se p, q forem mónicos, então pode escolher-se $m = 1$.

554. Dados n pesos de igual aspecto. Mostra que $\lceil 3n/2 \rceil - 2$ comparações de pares de pesos com uma balança farmacêutica são necessárias e suficientes para encontrar tanto uma moeda de menor peso como uma moeda de maior peso.

555. Mostra que as diagonais de um quadrilátero cíclico $[ABCD]$ fazem um ângulo cuja amplitude é a média das amplitudes dos arcos AB e CD.

556. Seja $[ABC]$ um triângulo e X, Y, Z os pontos de tangência da sua circunferência inscrita com os lados $[BC]$, $[AC]$ e $[AB]$. Mostra que AX, BY e CZ se intersectam num ponto.

557. Suponhamos que 1000 estudantes se encontram dispostos num círculo. Prova que existe um inteiro k com $100 \leq k \leq 300$ tal que neste círculo existe um grupo contínuo de $2k$ estudantes, para os quais a primeira metade contém o mesmo número de raparigas que a segunda metade.

558. Após aturados cálculos o geómetra-mor da Casaπa concluiu que a conjectura que recentemente intuiu, após dúzias de figuras, equivale a que, em notação euleriana standard, num triângulo se tenha

$$(a-c)(a+b+c)\sin(\hat{A}/2) = -2ab\cos(\hat{A}+\hat{B}/2)\sin(\hat{A}/2+\hat{B}/2).$$

a. Dá conselhos pormenorizados como em princípio é possível decidir "todos" os tipos de tais conjecturas.

b. Decide a dada conjectura concreta.

559. Um *quasigrupo* é um conjunto S munido de uma operação binária $S \times S \ni (s, s') \mapsto ss' \in$ tal que para $a, b \in S$ quaisquer as equações $ax = b$ e $ya = b$ têm exactamente uma solução. Seja Q um quasigrupo finito. Mostra o seguinte: *Se A, B são subconjuntos de Q tal que $Q \neq AB$, então $|Q| \geq |A| + |B|$.*

560. a. Encontra todos os inteiros n tais que $n^3 - n + 1$ é múltiplo de 6.
b. Prova que se p é primo então $(a+b)^p \equiv a^p + b^p \pmod p$.

561. Determina todos os pares (p, n) formados por um primo p e um inteiro positivo n tais que $p^2 + 7^n$ é um quadrado perfeito.

562. Considera n circunferências no plano. Em cada uma das circunferências é traçada uma corda, de tal forma que duas cordas, de circunferências distintas, tenham no máximo um ponto em comum. Para pintar o mapa assim obtido, de tal forma que duas regiões com uma fronteira em comum tenham cores distintas, mostra que 3 cores são suficientes.

563. Seja $[ABC]$ um triângulo actuângulo. Seja Ω o círculo cujo centro L está contido no lado $[BC]$. Suponhamos que Ω é tangente a AB em B' e a AC em C'. Suponhamos também que o circuncentro O do triângulo $[ABC]$ se encontra no arco mais curto $B'C'$ de Ω. Mostra que o circuncírculo de ABC e Ω se encontram em dois pontos.

564. Num conjunto, G, de 1001 pessoas, cada subconjunto de 11 contém pessoas que se conhecem. Mostra que, existem em G pelo menos 101 pessoas cada uma das quais tem pelo menos 100 conhecidos em G.

565. Considera o problema C2 abaixo. Prova que as implicações que aí não são pedidas são verdadeiras (mostrando assim que as afirmações são equivalentes).

566. Verifica se existe um polinómio, p, com coeficientes inteiros tal que $p(2) = 3$ e $p(7) = 17$.

567. Para cada inteiro positivo k, seja $t(k)$ o maior divisor ímpar de k. Determina todos os inteiros positivos $\boldsymbol{a}$ para os quais existe um inteiro positivo n tal que todas as diferenças

$$t(n+\boldsymbol{a}) - t(n)\,,\quad t(n+\boldsymbol{a}+1) - t(n+1)\,, \ldots,\quad t(n+2\boldsymbol{a}-1) - t(n+\boldsymbol{a}-1)\,,$$

são divisíveis por 4.

568. a. Mostra que se um número da forma $a^s + 1$ é primo, com $a \geq 2$, então $s = 2^m$ $(a, s, m \in \mathbb{Z}_{\geq 0})$.
b. Uma famosa gafe de Fermat foi ter anunciado em 1659 a prova de que todos os números da forma $2^{2^m} + 1$, $m = 0, 1, 2, \ldots$ são primos.
Mostra que para o caso $m = 5$ todo o factor primo deve ter a forma $1 + 64n$, o que terá ajudado a Euler encontrar o factor 641 assim refutando a afirmação de Fermat.

569. Numa competição desportiva de n dias de duração são entregues m medalhas. No primeiro dia são entregues uma medalha e um séptimo das restantes $(m-1)$ medalhas; no segundo dia são entregues duas medalhas e um séptimo das medalhas que ainda restam; etc. No último dia são entregues exactamente n medalhas. Quantos dias durou a competição, e quantas medalhas foram entregues?

570. Sejam a, b, c, d números naturais tais que $\mathrm{mdc}(a, b, c, d) = 1$ e $\mathrm{mdc}(ab+cd, ac+bd, ad+bc) = m$, com $m > 1$ e ímpar. Prova que m não divide $a + b + c + d$.

571. a. Num grupo de 18 pessoas, mostra que há um grupo de 4 em que todos se conhecem ou em que ninguém se conhece.

b. Escreve em termos de números de Ramsey o que se afirma na alínea anterior.

572. Sejam ρ, ρ' números racionais dados. Encontra todos os inteiros v, w, x, y que satisfazem

$$v + y = w + x\,, \quad \rho = \frac{vy - wx}{xy - vw} \quad \text{e} \quad \rho' = \frac{xy - vw}{vx - wy}\,.$$

573. Sejam $\triangle \equiv \triangle[ABC]$ um triângulo, $\mathcal{C}$ a sua circunferência circunscrita, e $Q \in \mathcal{C}$ um ponto diferente de A, B, C. Mostra que as projeções de Q sobre o prolongamento dos lados de $\triangle$ são colineares.

574. O *número de Newton* de um octógono regular é, por definição, o número máximo de octógonos regulares congruentes com ele, que lhe são tangentes (exteriormente) e que cujos interiores são disjuntos 2 a 2. Mostra que o número de Newton de um octógono regular é maior ou igual a 6.

575. Considera um conjunto de n inteiros com $n \in \mathbb{N}$. Mostra que um desses inteiros é múltiplo de n ou a soma de alguns desses inteiros é múltiplo de n.

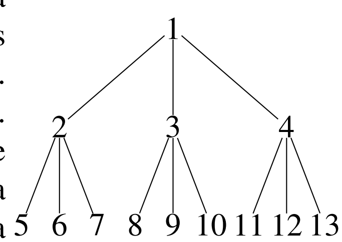
576. Determina o número máximo de reis que se podem colocar num tabuleiro de Xadrez 2012×2012 de tal forma que cada peça esteja a atacar uma e uma só das outras peças.

577. Sejam $a, b, c > 0$ reais de soma 1. Demonstra a seguinte desigualdade

$$\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{abc}\right) \leq \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} - 1\right)\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} + \frac{3}{2}\right).$$

578. Quais os inteiros positivos n tais que $(n-1)^{n^{n+1}} + (n+1)^{n^{n-1}}$ é divisível por n^n?

579. Seja $G = G(V, E)$ uma árvore ternária infinita invertida de que a figura mostra os primeiros três níveis. De cima para baixo e da esquerda para a direita consideramos os vértices enumerados com os inteiros $1(=\text{raiz}), 2, 3, 4, 5, 6, \ldots$. Uma formiga parte da raiz e desce ao longo das arestas. Em cada vértice "vira" ou para a esquerda (E) (do ponto de vista do observador) ou escolhe o meio (M) ou "vira" para a direita (D). As decisões tomadas são guardadas numa palavra com letras E,M,D. Sabendo que a formiga pára no vértice 2012, qual é a palavra que ela guarda? Justifica.



580. Sejam $a_0, a_1, \ldots, a_n$ números reais de soma não nula. Mostra que então pelo menos um dos polinómios

$$p_j := a_j + a_{j+1}x + \cdots + a_n x^{n-j} + a_0 x^{n-j+1} + \cdots + a_{j-1}x^n\,,\ j = 0, 1, 2, \ldots, n,$$

não tem raiz no intervalo $[0, 1]$.

581. Sejam $x_1, \ldots, x_{100}$ números reais não negativos tais que $x_j + x_{j+1} + x_{j+2} \leq 1$ para todo o $j = 1, \ldots, 100$ (considera que $x_{101} = x_1$ e $x_{102} = x_2$). Determina o maior valor que a soma $S = \sum_{j=1}^{100} x_j\, x_{j+2}$ pode tomar.

582. Seja $\mathbb{Q}^+$ o conjunto dos números racionais positivos. Determina todas as funções

$$f : \mathbb{Q}^+ \to \mathbb{Q}^+ \text{ tais que } f\left((f(x))^2\, y\right) = x^3\, f(x\, y).$$

583. Numa circunferência marcam-se 10000 pontos, numerados de 1 a 10000 no sentido dos ponteiros do relógio. Em seguida traçam-se 5000 segmentos entre estes pontos, de modo que cada ponto pertença a um único segmento e cada segmento intersecte exactamente um outro segmento. A cada segmento associa-se o produto nos números nos seus extremos.
Prova que a soma dos números dos segmentos é múltipla de 4.

584. Seja n um inteiro positivo. Mostra que se 2^{n-1} divide $n!$ então n é uma potência de 2.

585. Determina todos os pares de inteiros (a, b) tais que $a^3 + b^3 + 3ab = 53$.

586. Para inteiro positivo s defina-se $[s] := \{1, 2, \ldots, s\}$. Sejam m, n, k inteiros positivos. Determina o número das aplicações $[n] \xrightarrow{f} [m]$ com $f([n]) \supseteq [k]$. Expressa-o numa fórmula com símbolos tirados do alfabeto
$$\{k, l, m, n, -, +, \cdot, /, (,), \sum, =, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}.$$

587. Considera a recorrência
$$T(n) = \begin{cases} 0 & \text{se } n = 1 \\ T(\lfloor n/2 \rfloor) + T(\lceil n/2 \rceil) + n - 1 & \text{se } n \geq 2 \end{cases}.$$
Dá uma fórmula explícita para $T(n)$. Analisa se existe uma tal fórmula usando menos do que vinte símbolos do alfabeto $\{n, \lceil, \rceil, \lfloor, \rfloor, \log_2, -, +, \cdot, \hat{\ }, 1, 2, 3\}$, onde "$-$" é o "menos", $\hat{\ }$ significa exponenciação, e $\log_2$ é o logaritmo na base 2.

588. Sejam m e n dois naturais não nulos. Designa-se por *semigrupo*, e denota-se por $\langle m, n \rangle$, o conjunto $\{am + bn : a, b \in \mathbb{N}\}$. Adicionalmente, $\langle m, n \rangle$ diz-se um *semigrupo numérico* se $\mathbb{N} \setminus \langle m, n \rangle$ for um conjunto finito. Mostra que $\langle m, n \rangle$ é um semigrupo numérico se e só se $\mathrm{mdc}(m, n) = 1$.

589. Determina todas as funções $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tais que $f(x^2 + f(y)) = y - x^2$, $x, y \in \mathbb{R}$.

590. Mostra que não existem inteiros x e y tais que $y^2 = x^3 + 23$.

591. Um *terno* de inteiros positivos (a, b, c) diz-se *pitagórico* se $a^2 + b^2 = c^2$. Mostra que existem infinitos ternos pitagóricos da forma $(x, x + 1, z)$.

592. Dá a soma $\displaystyle\sum_{i=1}^{k} 2^{k-i} i^2$ por uma fórmula fechada.