(1). Podemos escrever

$$n^k = ((n-1)+1)^k = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} (n-1)^j$$

e como $\binom{k}{0}(n-1)^0 = 1$ e $\binom{k}{1} = k$ temos

$$n^k - 1 = (n-1)^2 \sum_{j=2}^{k} \binom{k}{j} (n-1)^{j-2} + k(n-1)$$

donde se conclui o pretendido. ■

---

(2). Tomando $x = \sqrt[3]{7+5\sqrt{2}}$, $y = \sqrt[3]{7-5\sqrt{2}}$ e $r = x+y$ vemos que r é uma raíz da equação

$$r^3 + 3r - 14 = 0\,.$$

Pode ver-se que a única raíz racional da equação é $r = 2$. Além disso, esta é a única raíz real da equação, pelo que $r = 2$. ■

---

(3). **(a)** Os múltiplos de i, $k.i$ com $k = 1, 2, \ldots, p-1$ admitem a seguinte representação:

$$k.i = b.p + r\,,\ \ 0 \le r \le p-1$$

com os $r = r(k)$ todos distintos, para $k = 1, 2, \ldots, p-1$. De facto, se $r(k_1) = r(k_2)$ para algum $k_1, k_2 \in \{1, \ldots, p-1\}$ então $k_1 i - k_2 i = (b_1 p + r(k_1)) - (b_2 p + r(k_2)) = (b_1 - b_2)p$, e portanto $p|(k_1 - k_2)i$, i.e. $p|(k_1 - k_2)$ ou $p|i$. O que é impossivel pois $0 < |k_1 - k_2| < p$ e p é primo.

Assim, dado i existe j tal que $j.i = b(j).p + r(j)$ com $r(j) = 1$. Agora, se $p|(i^2-1)$ temos $p|(i-1)$ ou $p|(i+1)$, o que é impossivel se $2 \le i \le p-2$. Então $i \neq j$.

Pode ver-se também que $j = 1$ ou $j = p-1$ é também impossivel.

(b) Note-se em primeiro lugar que $1.(p-1) = p-1 \equiv -1 \mod p$.

Como pela alínea (a), o produto $2 \ldots 3. \ldots .(p-2)$ pode ser decomposto em produtos $(s_2.s_3)\ldots(s_{p-3}.s_{p-2})$ cada um dos quais é $1 \mod p$, temos o pretendido. ■

---

(4). Suponhamos que $\sqrt{2}\,,\ \sqrt{3}\,,\ \sqrt{5}$ são elementos de uma progressão artmética de razão d, então existem a_1, k, m, n tais que

$$\sqrt{2} = a_1 + kd\,,\ \sqrt{3} = a_1 + md\,,\ \sqrt{5} = a_1 + nd$$

e portanto, $\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}} = \dfrac{m-k}{n-m}$ é um número racional que será denotado por r. Assim, elevando ao quadrado obtemos $r^2\sqrt{15} - \sqrt{6} = (8r^2-5)/2$ é também um número racional que denotaremos por s. Elevando outra vez ao quadrado obtemos que $\sqrt{10} = (15r^4 - s^2 + 6)/(6r^2) \in \mathbb{Q}$, o que é falso. ■

(5). Devido à representação de um número como produto dos seus factores primos, temos que todo o elemento k de S admite a representação $k = 2^j s$ para algum número ímpar s. Assim, podemos denotar os elementos de S por $S = \{2^{k_1} s_1\,,\ 2^{k_2} s_2\,,\ \ldots\,,\ 2^{k_{n+1}} s_{n+1}\}$, onde os k_j são escolhidos entre os elementos do conjunto $\{0, 1, \ldots\}$ e os s_j entre os elementos do conjunto $\{1, 3, \ldots, 2n-1\}$. Este conjunto tem n elementos, pelo que existirão dois s_j, s_l com $s_j = s_l$ e $j \neq l$, e portanto um dos elementos de S, $2^{k_j} s_j$ ou $2^{k_l} s_l$ divide o outro. ■

---

(6). Seja $k = \max\{l :\ 2^l \in T\}$ e $s \in T$ tal que $2^k | s$. Então $s = 2^{k'} s'$ com $k \leq k'$ e $s' \in \mathbb{N}$, que podemos assumir maior do que ou igual a 2. Agora, como $n \geq s$, verificamos que $\hat{s} = 2^{k'} 2 \leq 2^{k'} s' = s \in T$, o que é impossivel por definição de k. Assim, $s' = 1$ e $s = 2^{k'}$. Mais uma vez, por definição de k obtemos que $k' = k$, e portanto $s = 2^k$. ■

---

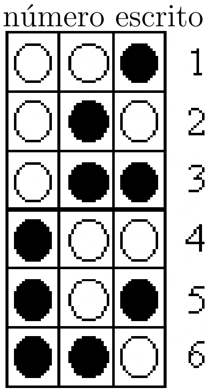
(13). Vejamos primeiro que p tem infinitos múltiplos da forma $999\cdots 9$. Consideremos a sucessão: $9\,,\ 99\,,\ 999\,,\ \ldots\,,\ 999\cdots 9$ em que o último número tem n algarismos iguais a 9. Então, na sucessão

$$9 = 10 - 1\,;\ 99 = 10^2 - 1\,;\ 999 = 10^3 - 1\,;\ \ldots\,;\ 999\cdots 9 = 10^n - 1\,.$$

há infinitos termos da forma $10^{p-1} - 1$ com $p \neq 2, 5$ e p primo. Assim, pelo teorema de Fermat: $10^{p-1} - 1 \equiv 0 \,(\operatorname{mod} p)$ se $p \neq 2, 5$ e a afirmação fica demonstrada. Finalmente $999\cdots 9 = 9 \times 111\cdots 1$ pelo que se p e 9 com $p \neq 3$ são primos entre si, como p divide o produto, terá de ser um divisor de $111\cdots 1$. Fica assim por analisar o caso $p = 3$ que é evidente pois números: $111\,,\ 111111\,,\ \ldots$ com 1 em número múltiplo de 3 são múltiplos de três. ■

---

(14). Disporemos o tabuleiro verticalmente, i.e. com 7 filas e 3 colunas. Atribuiremos à cor branca o algarismo 0 e à cor preta o algarismo 1. Desta forma cada fila representa um número escrito na base 2.



Em primeiro lugar, é fácil ver que se numa fila se colocam todas as peças de uma mesma cor, por exemplo pretas, necessariamente haverá um rectângulo, pois não podemos colocar em nenhuma fila duas peças pretas e só podemos preencher no máximo 5 filas sem formar rectângulo. Por outro lado, se dois números são iguais as filas formam rectângulo. Desta forma concluímos que as filas têm de representar números diferentes. Pelas considerações anteriores temos de excluir os números 000 e 111.

Com três algarismos e na base dois existem $2^3 = 8$ números diferentes, tirando os anteriores ficam 6 números para 7 filas, pelo que necessariamente temos de repetir números e formar um rectângulo. O problema não teria solução num tabuleiro 3×6 tal como se mostra na figura. ■

(15). Comecemos por ver que existem constante reais A, B, C tais que f se representa na forma $f(x) = Ax(x+1) + Bx(x-1) + C(x+1)(x-1)$. Tomando sucessivamente $x = -1, 0, 1$ e resolvendo o sistema resultante obtemos

$$f(x) = f(1)x(x+1)/2 + f(-1)x(x-1)/2 + f(0)(x+1)(x-1)\,, \quad x \in \mathbb{R}\,.$$

Pelo que $|f(x)| \leq |x(x+1)|/2 + |x(x-1)|/2 + |1-x^2|$, $x \in \mathbb{R}$. Agora, como $x \in [-1,1]$, sabemos que os seguintes termos são não negativos: $1+x$, $1-x$, $1-x^2$, a última expressão toma a forma $|f(x)| \leq -x^2 + |x| + 1 = 5/4 - (|x| - 1/2)^2$, que é a desigualdade procurada para a a função de expressão analítica f.

Para obtermos a segunda desigualdade, basta notar que para $x \neq 0$ a expressão analítica da função g é dada por $g(x) = x^2 f(1/x)$. Assim

$$g(x) = f(1)(1+x)/2 + f(-1)(1-x) + f(0)(x^2-1)\,,\ x \in [-1,1].$$

Donde se conclui que $|g(x)| \leq 2 - x^2$, e daqui a desigualdade procurada. ∎

---

(16). Comecemos por definir que os agentes A e B são *neutrais entre si*, se A não vigia B nem B vigia A. Denotemos os agentes por $A_1, A_2, \cdots A_{16}$. Sejam:

- a_i o número de agentes que vigiam A_i;
- b_i o número de agentes que são vigiados por A_i;
- c_i o número de agentes que são neutrais a A_i.

Desta forma $a_i + b_i + c_i = 15\,,\ a_i + c_i \leq 8\,,\ b_i + c_i \leq 8\,,\ i \in \{1, 2, \ldots 16\}\,.$

Note-se que se alguma destas desigualdades se não verificasse, então não se poderia numerar um grupo de 10 agentes na forma indicada. Combinando as relações indicadas obtemos $c_i \leq 1$. Assim para qualquer agente o número de agentes neutrais é 0 ou 1.

Raciocinando por redução ao absurdo, vamos supor que existe um grupo de 11 agentes que não se pode enumerar na forma desejada. Seja B um qualquer dos agentes desse grupo. Numeremos os restantes elementos desse grupo por $C_1, C_2, \ldots, C_{10}$ de modo que C_1 vigia C_2, ... , C_{10} vigia a C_1. Suponhamos que nenhum dos C_i seja neutral com B. Então se C_1 vigia B, B não pode vigiar C_2, pois nesse caso C_1, B, C_2, ... , C_{10} formariam um grupo nas condições do problema, logo C_2 vigia B, etc. Deste modo chegamos à conclusão que todos os agentes do grupo, vigiam B (contradição). Assim cada um dos 11 agentes deve ter um e um só agente do grupo com o qual é neutral, o que é impossível. ∎

---

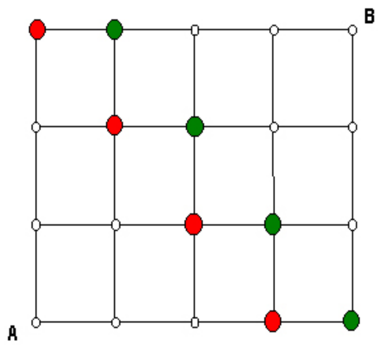
(17). Suponhamos que existe uma função $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ que verifica $f(f(n)) = n+1$. Assim, $f(0) = a \in \mathbb{N}$. Além disso, $f(f(0)) = 1$ e $f(f(0)) = 1$, pelo que, $f(1) = a+1$, $f(a+1) = 2$, $f(2) = a+2$, ...

Suponhamos que $f(n-1) = a+n-1$, então $f(a+n-1) = a+n$. Logo provámos por indução que $f(f(n)) = f(a+n) = 2a+n$ então $2a+n = n+1 \Rightarrow a = 1/2 \notin \mathbb{N}$. Donde se tem uma contradição e a condição suposta à partida é falsa. ∎

---

(18). Definamos um sistema de coordenadas com origem em A e unidade o lado de um quadrado. Como P e Q percorrem caminhos de longitude mínima, P só pode ir para a direita ou para cima e Q para a esquerda ou para baixo. Todos os caminhos têm longitude

7, pelo que P e Q somente se poderão encontrar entre o terceiro e quarto movimento. Na figura estão marcados a vermelho todas as possíveis posições de P depois do terceiro movimento e a verde as correspondentes de Q.



Caso 1. P chega a $(0,3)$. A probabilidade de que P chegue a $(0,3)$ é $(1/2)^3 = 1/8$. Somente se pode cruzar com Q se este estiver em $(1,3)$, que é um aconteciemnto com probabilidade $(1/2)^3 = 1/8$. P está obrigado a passar à posição $(1,3)$ mas a probabilidade de Q passar à posição $(0,3)$ é igual a $1/2$. A probabilidade de que se cruzem entre as posições $(0,3)$ e $(1,3)$ é $(1/8)^2(1/2) = (1/2)^7$.

Caso 2. P chega a $(1,2)$. A probabilidade de que P atinja a posição $(1,2)$ é $3(1/2)^3 = 3/8$ (note que há três formas diferentes de chegar a $(1,2)$). Somente se pode cruzar com Q se este estiver na posição $(1,3)$ ou $(2,2)$. Analisemo-los:
(a) Q chega a $(1,3)$ com probabilidade $1/8$, então vão cruzar-se entre $(1,2)$ e $(1,3)$ se P se deslocar para $(1,3)$ e Q para $(1,2)$, que são movimentos com probabilidade $1/2$. A probabilidade de se cruzarem é $(3/8)(1/8)(1/2)^2 = 3(1/2)^8$.
(b) Q chega a $(2,2)$ com probabilidade $3/8$, então vão cruzar-se entre $(1,2)$ e $(2,2)$ se P se deslocar para $(2,2)$ e Q para $(1,2)$, que são movimentos com probabilidade $1/2$. A probabilidade de se cruzarem é $(3/8)^2(1/2)^2 = 3^2(1/2)^8$.
Caso 3. P chega a $(2,1)$. Procedendo analogamente, a probabilidade de se cruzarem entre los puntos $(2,1)$ e $(2,2)$ é $9/2^8$; e a de se cruzarem entre $(2,1)$ e $(3,1)$ é $9/2^8$.
Caso 4. P chega a $(3,0)$. A probabilidade de se cruzarem entre $(3,0)$ e $(3,1)$, é $3/2^8$ e a de se cruzarem entre $(3,0)$ e $(4,0)$ é $1/2^7$. A probabilidade pedida é a soma de todos os casos, i.e. $37/256$. ■

---

(19). Denotando $\tan(2x) = u$, $\tan x = v$ e $\cot x = w$, temos que $u = \dfrac{2u}{1-u^2}$, $u = \dfrac{2w}{w^2-1}$, e ainda que u e $-w$ verificam a equação polinomial $t^2 + (2/u)t - 1 = 0$. Assim, $v - w = 2/u$, e portanto $v^2 + w^2 = (2/u)^2 + 2$, i.e. $f(u) = 2 + (2/u)^2$, $u \in \mathbb{R}^+$. Desta forma respondemos às alíneas (a), (b) e (c). A alínea (d) é a desigualdade entre as médias geométrica e aritmética de $x, 1/x$, que é fundamental para a resolução da alínea (e). De facto, $f(\sin t) + f(\cos t) = 12 + 4(\tan^2 t + \cot^2 t)$, e tendo em atenção o resultado da alínea (d) concluímos a demonstração. ■

---

(20). A sucessão de pontos $P_n = (x_n\,, y_n)$, é tal que as suas coordenadas verificam uma mesma equação recorrente de coeficientes constantes, com condições iniciais diferentes, i.e. $u_{n+3} = (u_{n+1} + u_n)/2\,,\ \ n = 0, 1, \ldots\,,$ com condições iniciais $x_0 = 5\,,\ x_1 = 5/2\,,\ x_2 = 5/2$ e $y_0 = 0\,,\ y_1 = 5/2\,,\ y_2 = 0$.

Procurando as soluções desta equação na forma t^n, encontramos que t é tal que $2t^3-t-1=0$. Como solução racional temos $t=1$, pelo que $2t^3-t-1=(t-1)(2t^2+2t+1)$, e portanto os possiveis valores de t são $t=1\,,\ \sqrt{2}/2\,e^{\pm 3\pi i/4}$. Assim, x_n e y_n tomam a forma $u_n=(\sqrt{2}/2)^n(d_1\cos\frac{3n\pi}{4}+d_2\sin\frac{3n\pi}{4})+c_1\,,\ n=0,1,\ldots,$ com constantes d_1,d_2,c_1 a determinar a apartir das condições iniciais dadas. Desta forma obtemos como coordenadas dos pontos P_n, $x_n=(\sqrt{2}/2)^n(2\cos\frac{3n\pi}{4}+\sin\frac{3n\pi}{4})+3\,,\ y_n=(\sqrt{2}/2)^n(-\cos\frac{3n\pi}{4}+2\sin\frac{3n\pi}{4})+1\,,$ com $n=0,1,\ldots.$ ■

(21). A expressão apresentada é conhecida como desigualdade de Jensen para funções convexas. Vimos nas sessões de trabalho que a função dada na alínea (b) é convexa. Para nos colocarmos nas condições da desigualdade apresentada, temos somente que identificar os pontos x_j, os pesos d_j e a função f. O enunciado resolve-nos o problema da procura da função f, dizendo-nos que é a apresentada na alínea anterior. Assim, tomando como pontos $y_j=x_{j+1}/x_j$, $j=1,2,\ldots,n$ com $x_{n+1}=x_1$ e pesos $d_j=x_j/(x_1+\cdots+x_n)$, $j=1,\ldots,n$ obtemos a desigualdade apresentada. ■