Uma viagem suave sobre rodas exóticas

19 janeiro 19

Fátima Silva Leite

Uma viagem atribulada!

Modificando a estrada, a viagem pode ser suave!

Stan Wagon, Professor no Macalester College, Minnesota, USA (2004)

Emparelhar rodas e estradas

Dada uma roda, encontrar a estrada

Dada uma estrada, encontrar a roda

- a roda deve rolar sem derrapar sobre a estrada
- o movimento deve ser retilíneo
- não pode haver solavancos

Desafio Matemático!

A Matemática das rodas e estradas exóticas

- **Como representar uma estrada ?**
- **Como representar uma roda ?**
- **Como exprimir restrições no movimento:**
  - **Sem derrapar ?**
  - **Sem solavancos ?**

Desafio Matemático!

Estradas e Rodas são representadas por curvas no plano xy.

Representando pontos no plano

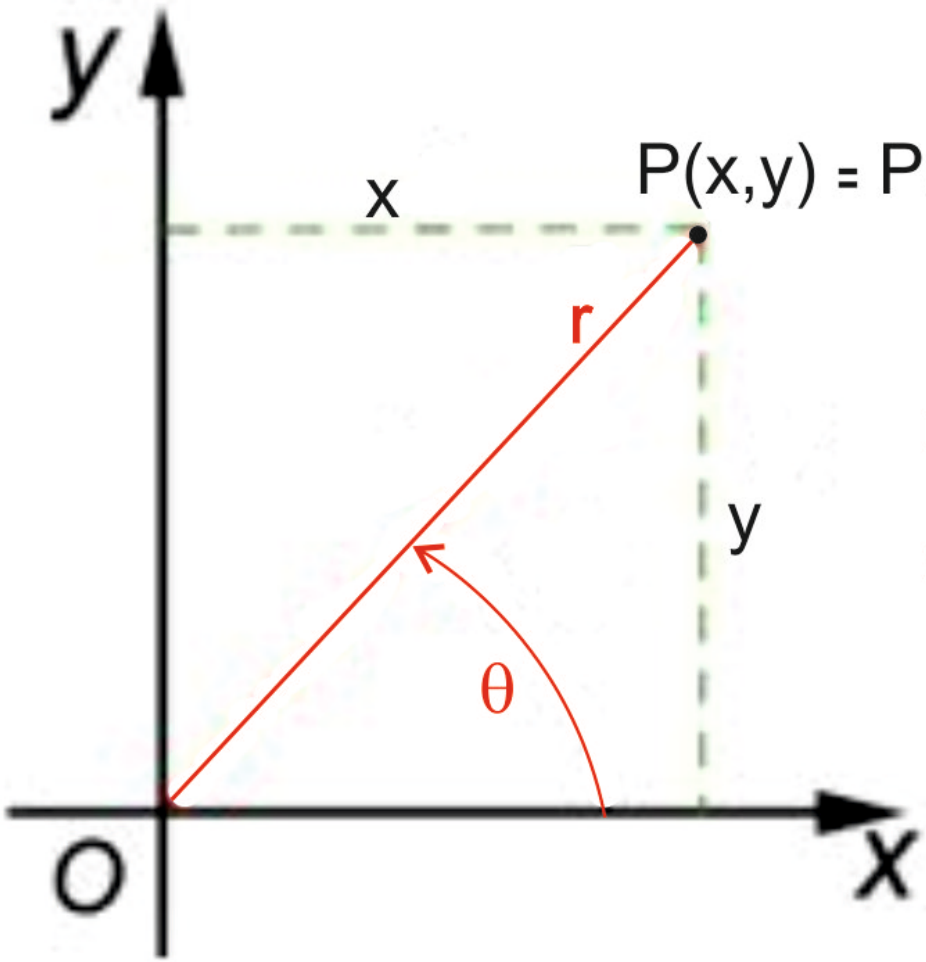
- em coordenadas cartesianas
- em coordenadas polares

Representando curvas planas

- equação cartesiana
- equação polar
- equações paramétricas

Coordenadas Polares

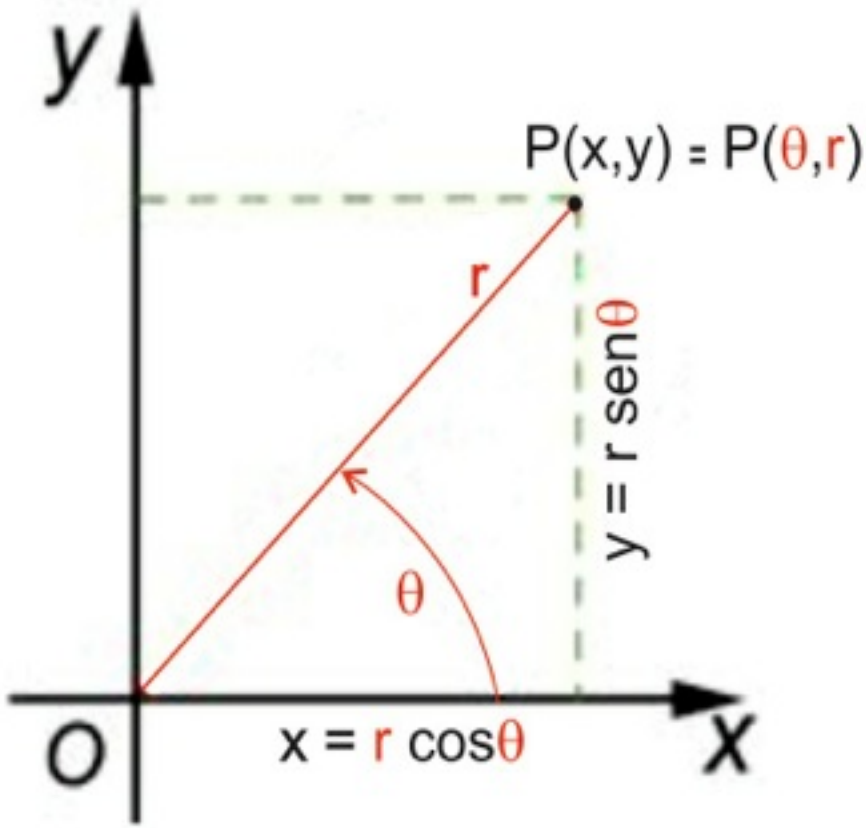
Outra forma de representar pontos do plano



r - distância do ponto P à origem

θ - ângulo que $\overrightarrow{OX}$ faz com $\overrightarrow{OP}$

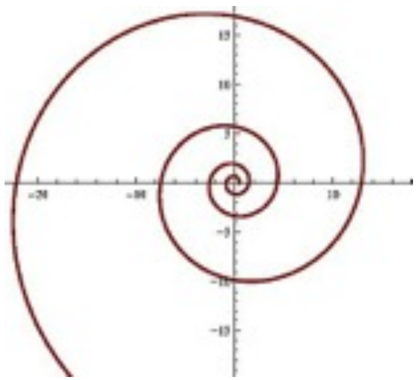
Relação entre coordenadas cartesianas (x,y) e coordenadas polares (θ,r)



$r = (x^2+y^2)^{1/2}$

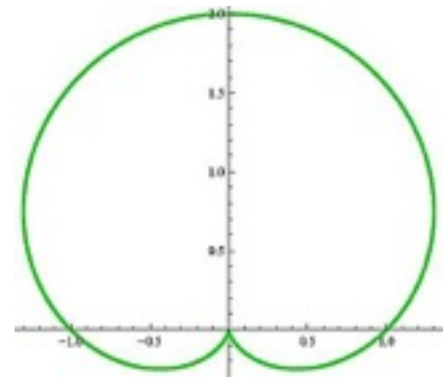
$\theta = \mathrm{arctg}(y/x)$

Se a curva é fechada, usar coordenadas polares



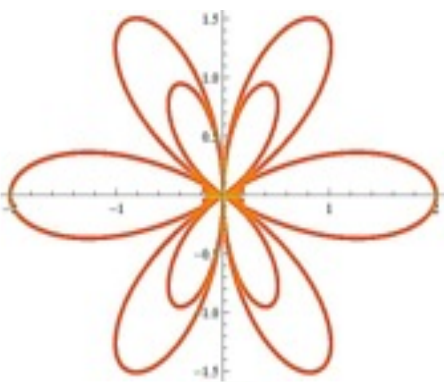
Espiral de Bernoulli

$$r(\Theta) = \frac{1}{2}e^{2\Theta}, \quad \Theta \in [0, 8\pi]$$



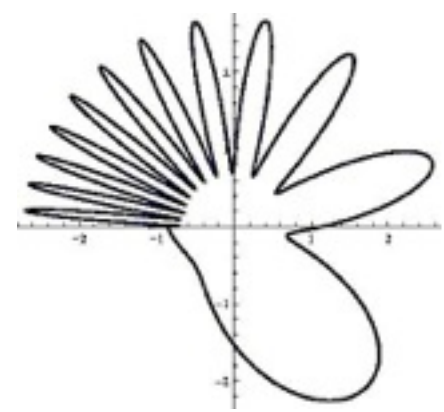
Cardióide

$$r(\Theta) = 1 + \sin\Theta, \quad \Theta \in [-\pi/2, 3\pi/2[$$



Flor

$$r(\Theta) = 3\sin(\Theta/2)\cos(3\Theta), \quad \Theta \in [0, 6\pi[$$



Choco

$$\mathbf{r(\Theta) = \sin(2^{\Theta}) - 1.7, \ \Theta \in [0, 2\pi[}$$

Coordenadas Paramétricas

Exprimem as coordenadas dos pontos de uma curva como funções de outra variável (o parâmetro t).

$$\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} \theta = f(t) \\ r = g(t) \end{cases}$$

São úteis para descrever movimento sobre curvas.
($t =$ tempo)

Se uma partícula se move sobre uma curva cujas equações paramétricas são conhecidas, conseguimos sempre localizar a partícula em cada instante.

Equações paramétricas da circunferência $x^2+y^2=1$:

$$\left\{\begin{array}{l} x = \cos(t) \\ y = \operatorname{sen}(t) \end{array}\right. , \qquad \left\{\begin{array}{l} x = \cos(2t) \\ y = \operatorname{sen}(2t) \end{array}\right.$$

Há muitas formas de parametrizar uma curva!

Reparametrizar altera a velocidade do movimento.

Se uma curva tem equação cartesiana $y = f(x)$, então podemos parametrizá-la como:

$$\left\{\begin{array}{l} x = t \\ y = f(t) \end{array}\right.$$

Como representar matematicamente rodas e estradas?

As **estradas** são representadas por gráficos de funções, dadas **em coordenadas cartesianas (x,y)** (**ou coordenadas paramétricas**).

As **rodas** são representadas por **curvas (fechadas)** dadas em **coordenadas polares (θ,r).**

Roda: $r(\theta) = 1$

Estrada: $y(x) = -1$

Algumas condições

- **A estrada está abaixo do eixo das abcissas.**

No início do movimento:

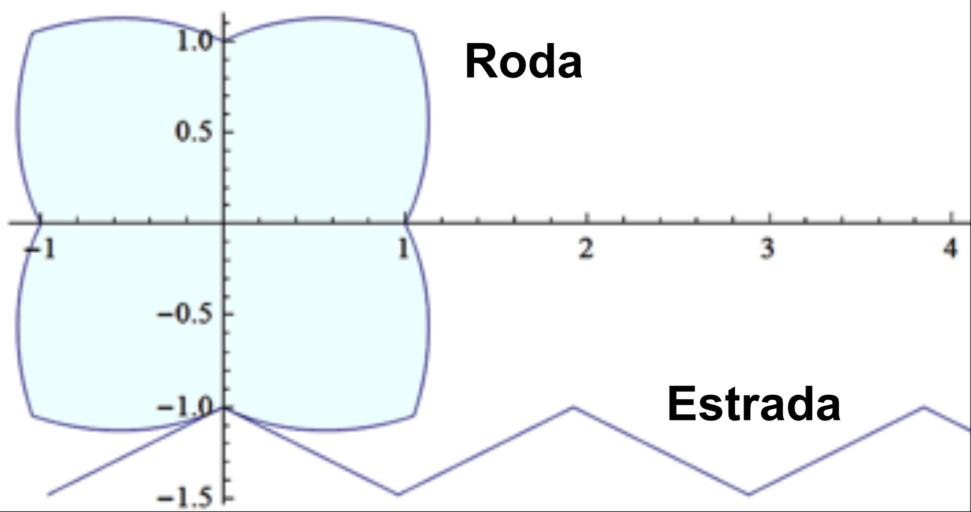
- **o centro geométrico da roda está na origem das coordenadas;**
- **no ponto de contacto entre a roda e a estrada:** $x = 0, \ \theta = -\frac{\pi}{2}$.

Durante o movimento:

- **o centro geométrico da roda desloca-se ao longo do eixo das abcissas;**
- **a roda e a estrada mantêm sempre um ponto de contacto.**

Raio da roda?

Profundidade da estrada?



Rolar sem derrapar

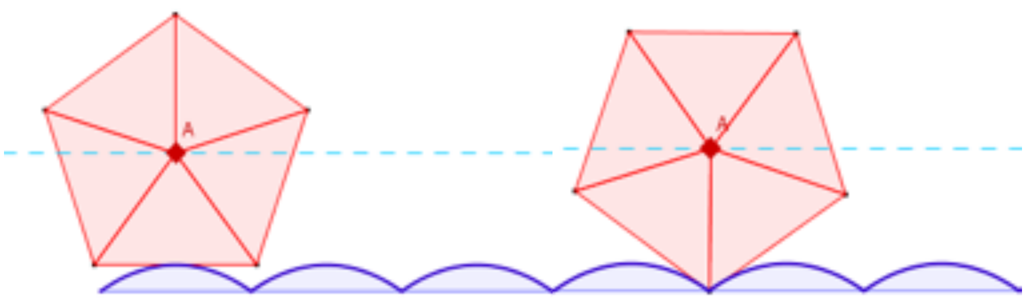
Em cada instante,
a distância percorrida na estrada é
igual a distância percorrida na roda.

$$\int_{0}^{\mathbf{t}} \sqrt{(\mathbf{x}'(\mathbf{t}))^{2} + (\mathbf{y}'(\mathbf{t}))^{2}}\,\mathbf{dt} = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\theta(\mathbf{t})} \sqrt{(\mathbf{r}(\theta))^{2} + (\mathbf{r}'(\theta))^{2}}\,\mathbf{d}\theta$$

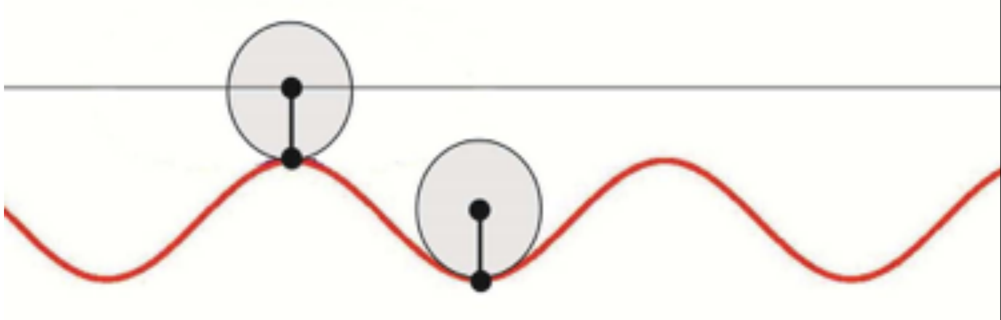
Rolar sem solavancos

**Em cada instante,
o raio da roda coincide com a
profundidade da estrada.**

$$\boxed{r(\theta(t))=-y(t)}$$



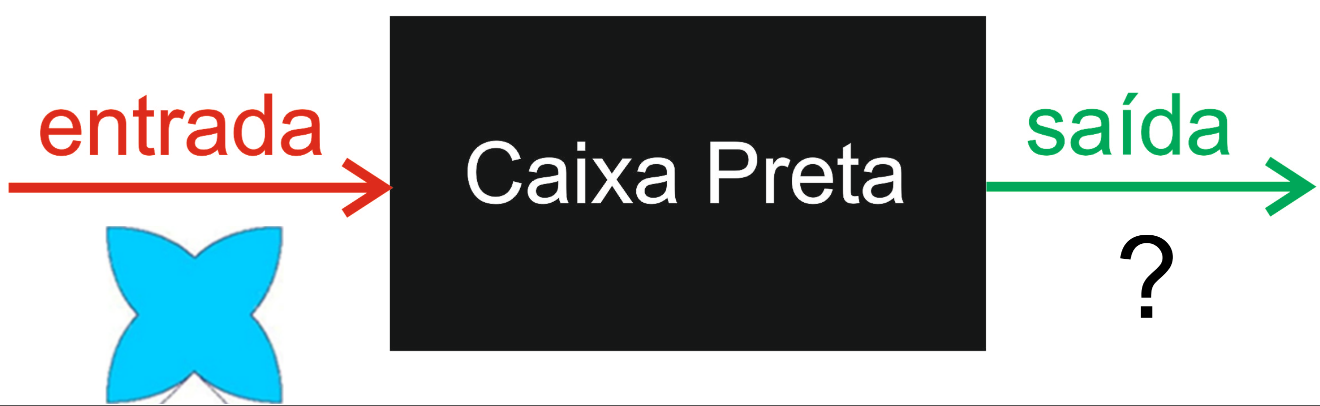
Rola sem solavancos



Rola com solavancos

Conhecida a estrada, determinar a roda

Conhecida a roda, determinar a estrada



O que há dentro da Caixa Preta?

Muitas equações matemáticas!

Para entenderes toda a matemática que permite emparelhar rodas e estradas tens de estudar matemática um pouco mais avançada.

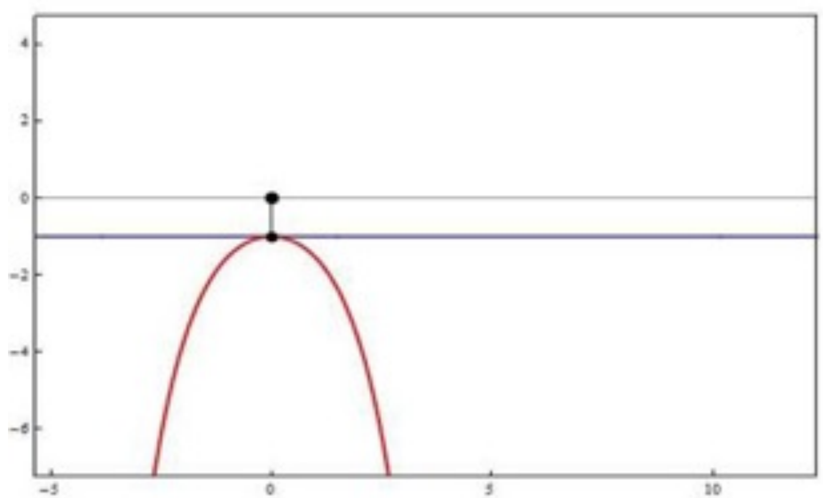
Estradas para rodas poligonais ?

A roda é uma reta!

Equação da roda: $r(\theta) = -k\csc(\theta),\ \theta \in (-\pi, 0)$

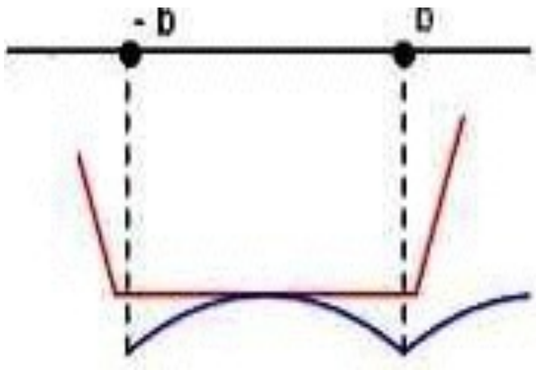
Equação da estrada: $y(x) = -k\cosh\left(\dfrac{x}{k}\right)$

A estrada é uma catenária invertida !

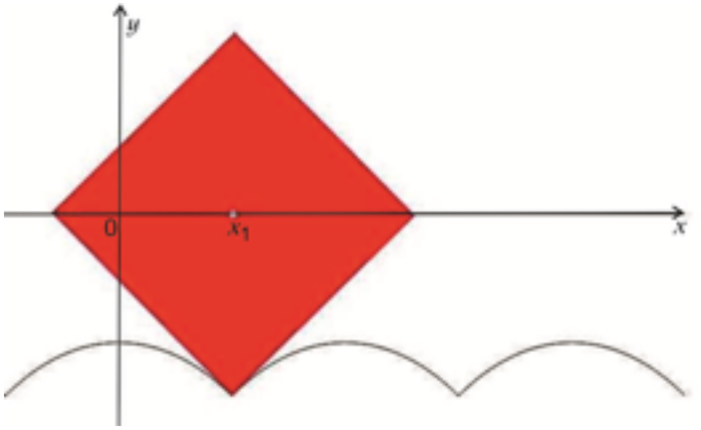


A roda é um polígono

Cada lado do polígono rola sobre um pedaço de catenária invertida



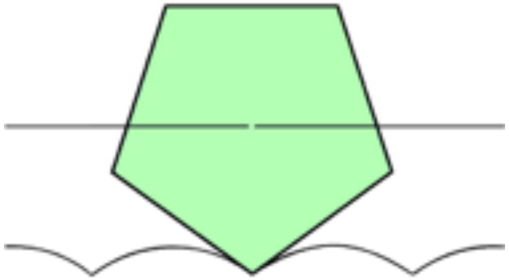
A estrada para uma roda poligonal é constituída por arcos de catenária invertida

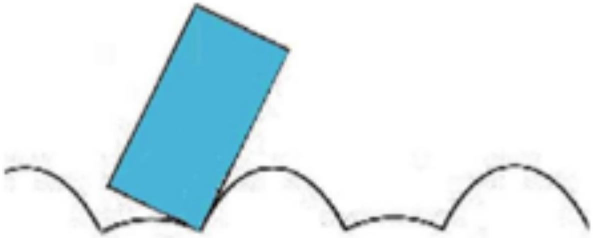


Roda quadrada, estrada composta de vários arcos de catenária

Estradas para rodas poligonais

Huygens
1629-1695





A catenária

curva de resistência máxima

Leibniz
1646-1716

A estrada é uma reta

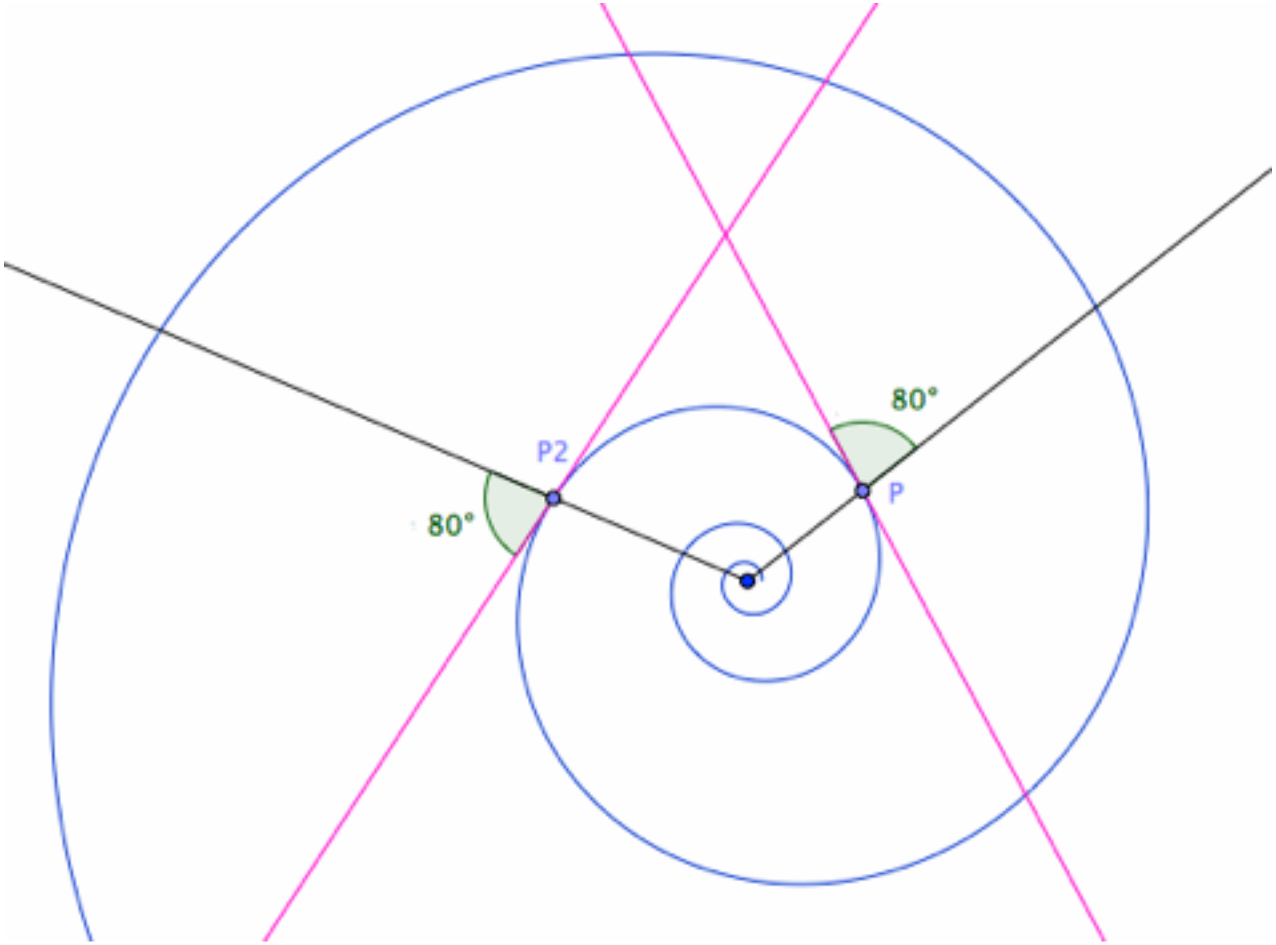
Equação da estrada: $y(x) = -y_0 - mx \qquad (m \neq 0)$

Equação da roda: $r(\theta) = y_0\, e^{m(\theta + \frac{\pi}{2})}$

Jakob Bernoulli
1654-1705

A roda é uma espiral de Bernoulli!

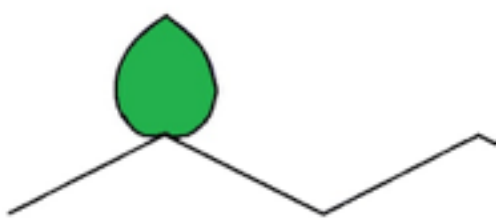
ESPIRAIS DE BERNOULLI SÃO EQUIANGULARES

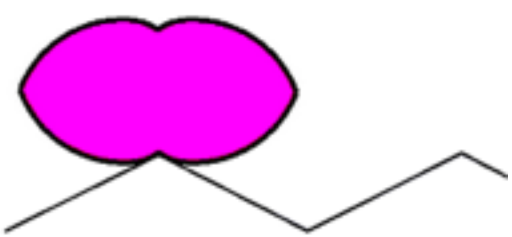


Estrada em dente de serra

A roda é constituída por bocados de espirais de Bernoulli

flores de Bernoulli





Escadas são o maior obstáculo para pessoas com mobilidade reduzida

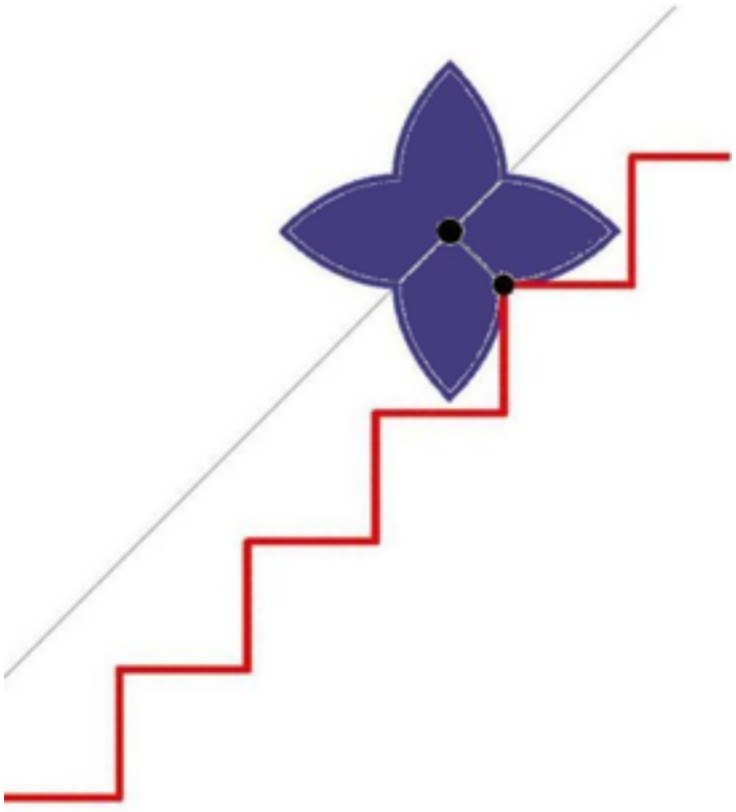
Em caso de incêndio use as escadas!

Scalevo wheelchair - ETH Zurique

Galileo Stair Climbing Wheelchair

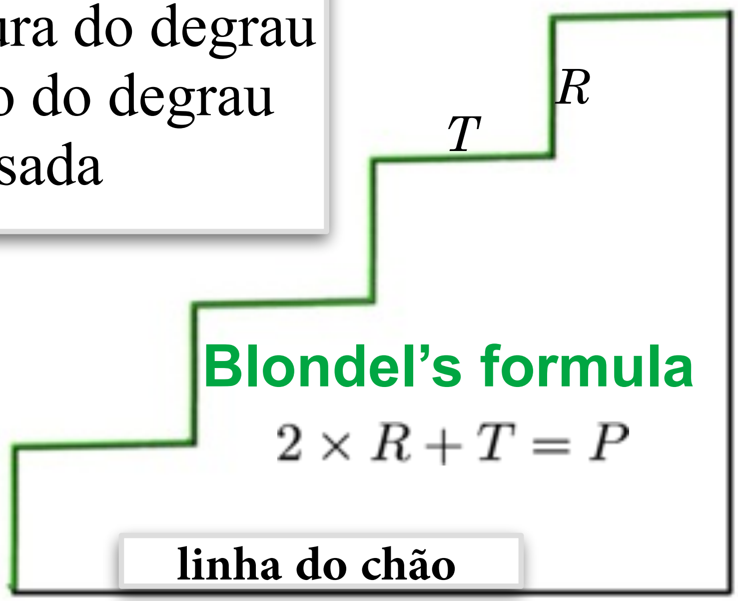
RODAS PARA ESCADAS

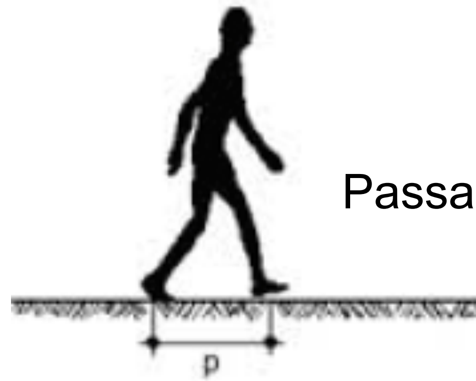
Rolando com espirais de Bernoulli



AS ESCADAS

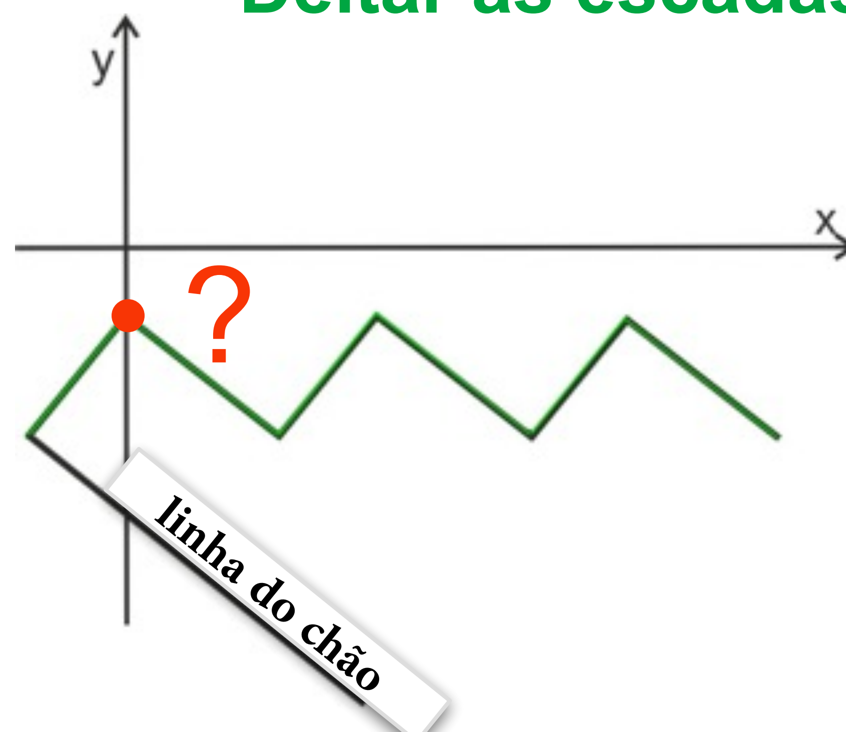
R - altura do degrau
T - piso do degrau
P - Passada



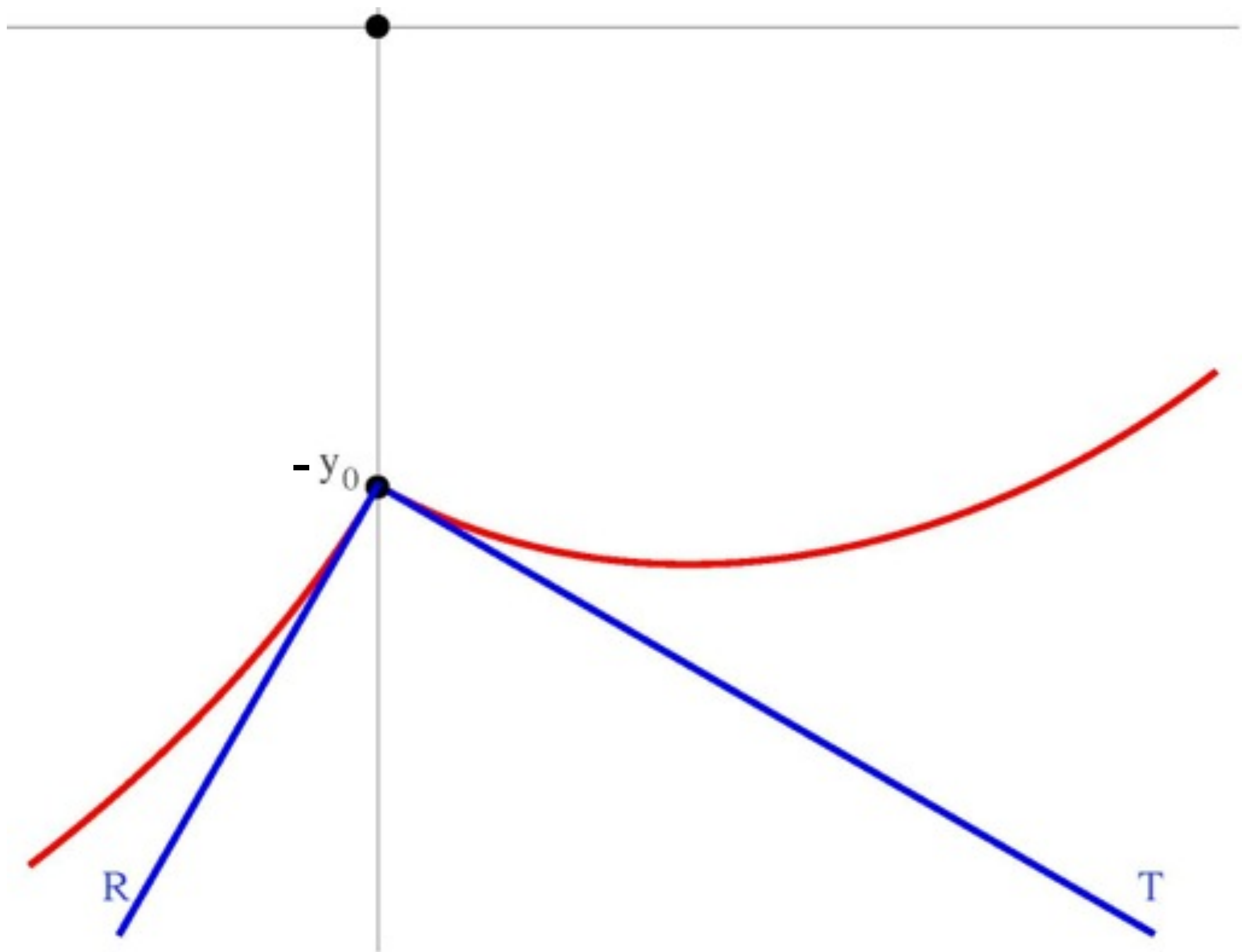


Passada média $\approx$ 64 cm

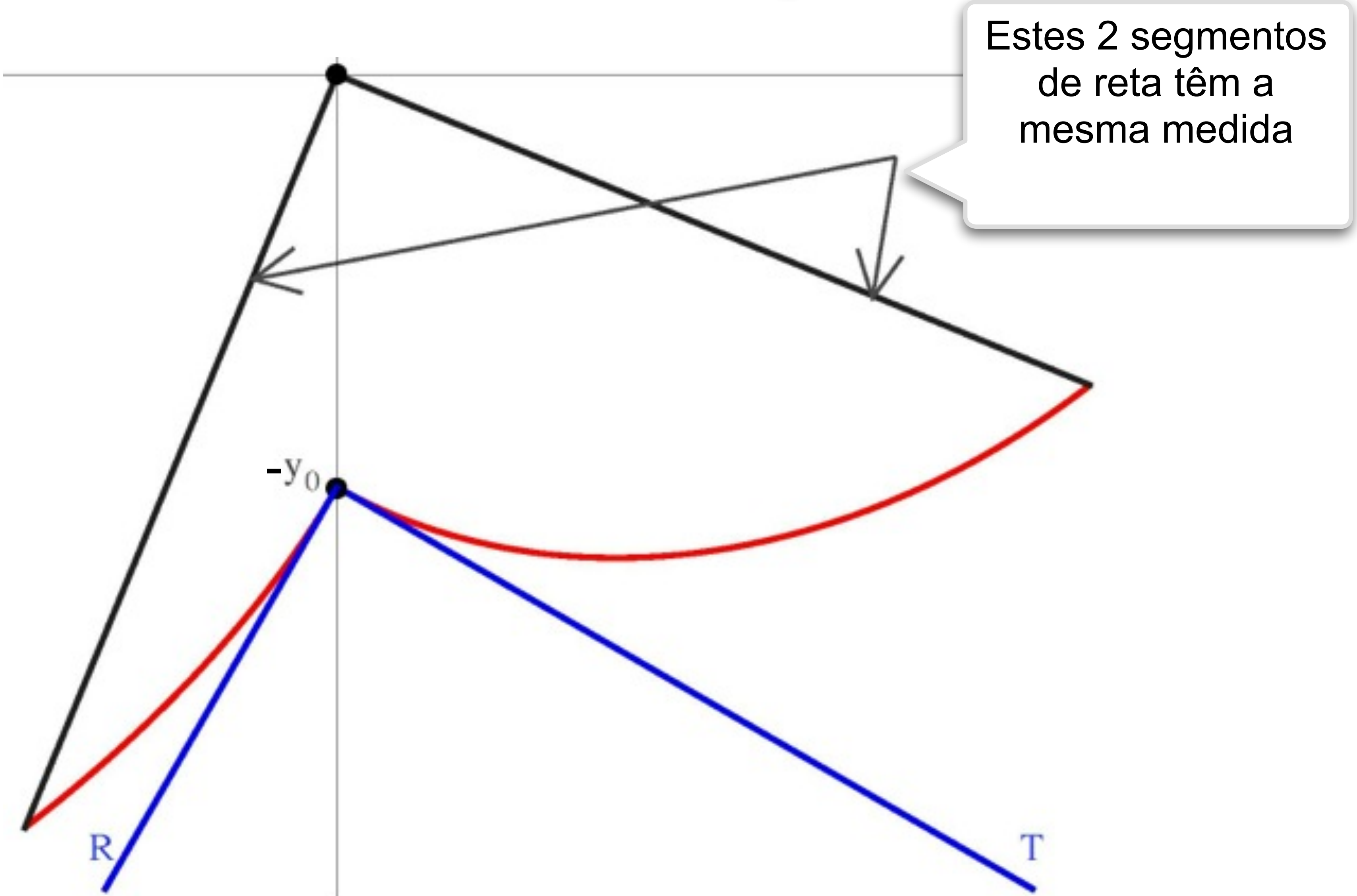
Deitar as escadas



Construindo a roda degrau a degrau

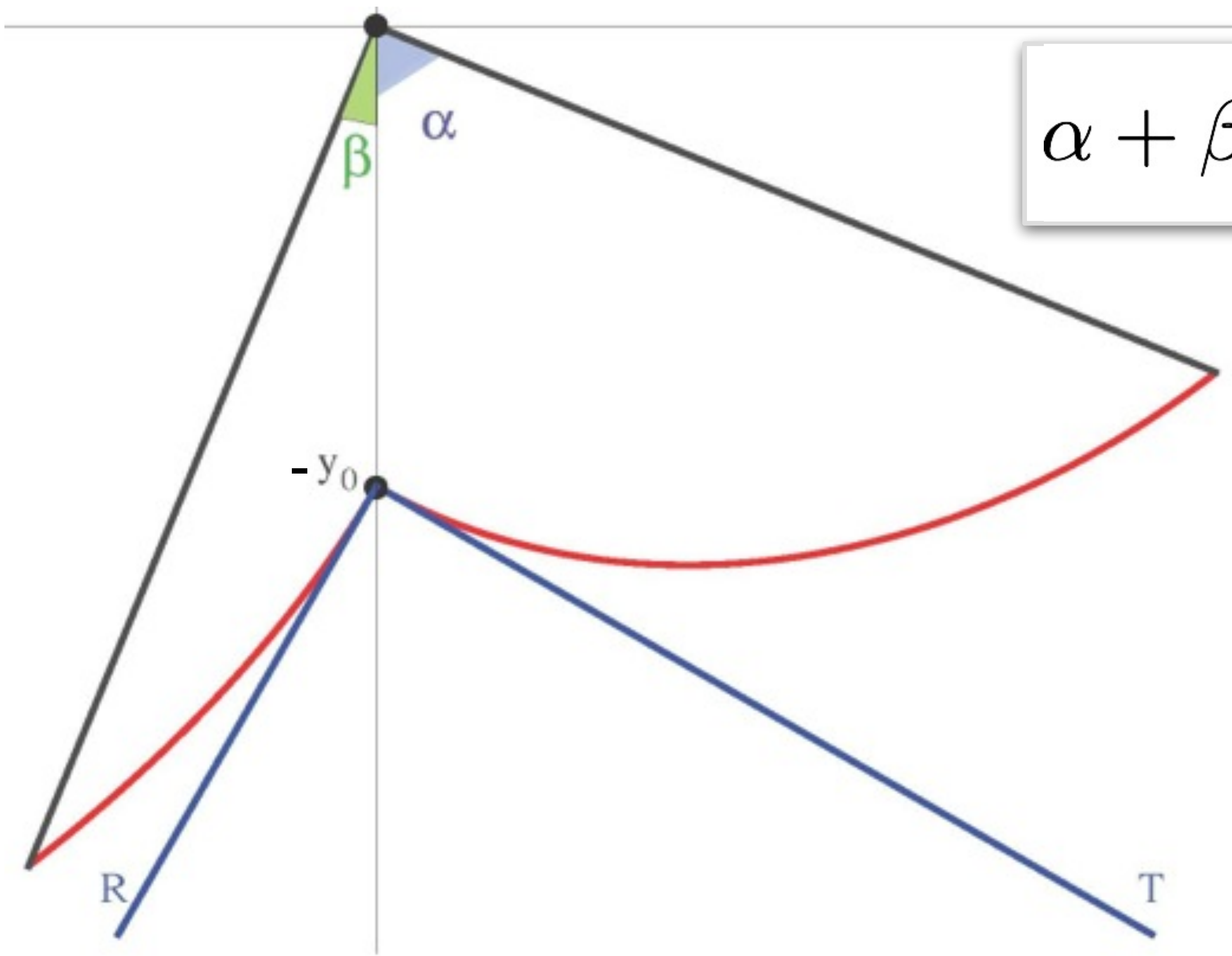


Construindo a roda degrau a degrau



A roda tem de ser fechada

Construindo a roda degrau a degrau



$$\alpha + \beta = \frac{2\pi}{n}$$

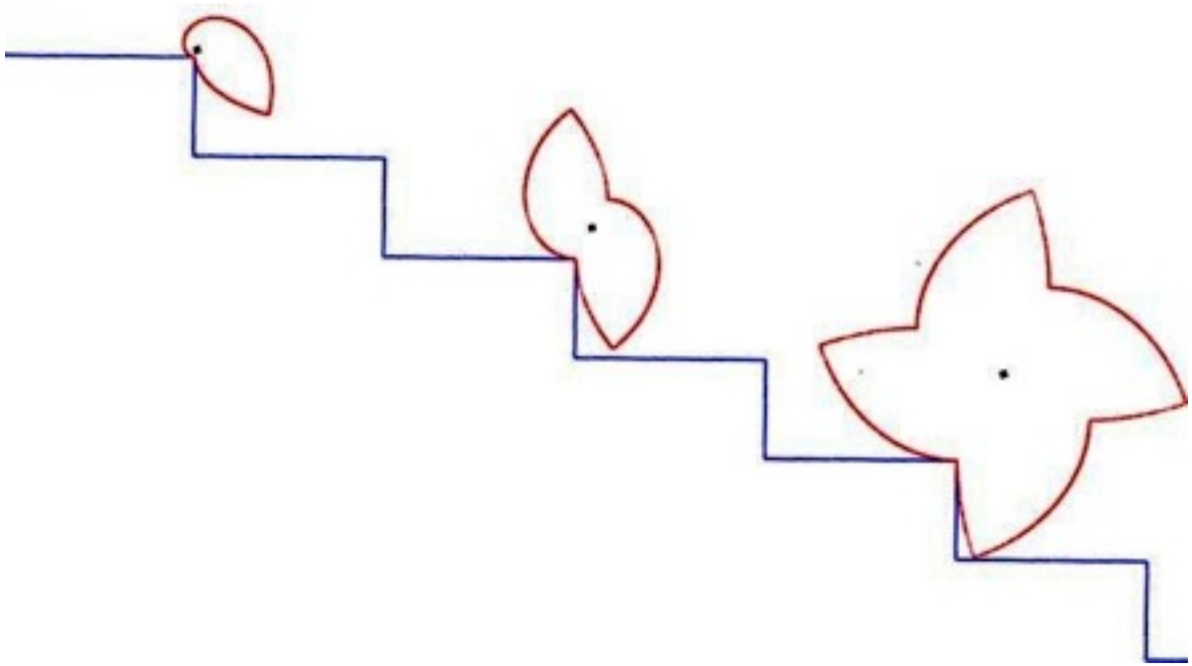
A roda tem de ser fechada

$$y_0 = \frac{T}{\sqrt{m^2+1}\left(e^{\frac{2\pi m}{(m^2+1)N}} - 1\right)}$$

N - número de pétalas da roda
R - altura do degrau
T - piso do degrau
m=T/R

Existe um número infinito de rodas para cada escada.

O tamanho da roda cresce com o número de pétalas.




HAWK

Boa viagem!