Emparelhando rodas e estradas

Fátima Silva Leite

DMUC

1 Introdução

Sempre que viajamos de carro numa estrada com piso irregular, mesmo que os amortecedores estejam em perfeitas condições, sentimos solavancos que tornam a viagem desconfortável. E se um carro tiver rodas com formatos bizarros, é difícil imaginarmos que possa rolar suavemente sobre uma estrada. Mas isto não é impossível!
O objetivo deste texto é ajudar a perceber como se emparelham de forma perfeita rodas e estradas exóticas. As partes coloridas a azul são propostas de trabalho.

2 Estradas e rodas

Estradas e rodas são representadas por curvas no plano cartesiano xy. É conveniente usar coordenadas paramétricas para as estradas e coordenadas polares para as rodas. Assume-se que durante o movimento, a roda mantém um único ponto de contato com a estrada.

2.1 Representação matemática de estradas e de rodas

Sejam I_1 e I_2 intervalos reais. Uma estrada é uma curva dada por equações paramétricas

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}, \quad t \in I_1, \tag{1}$$

enquanto que uma roda é uma curva dada por uma equação polar

$$r = r(\theta), \quad \theta \in I_2. \tag{2}$$

Sem perda de generalidade, vamos assumir que durante o movimento, que decorre no intervalo $I_1 = [0, T]$, o "centro geométrico"da roda se desloca horizontalmente, da esquerda para a direita, sobre a reta de equação $y = 0$ e que a estrada está situado abaixo desta reta. Isto é,

1. $x(t)$ e $\theta(t)$ são funções crescentes no intervalo I_1;
2. $y(t) < 0$, $\forall t \in I_1$.

2.2 Rolar sem deslizar e sem solavancos

De seguida, apresentamos as três condições essenciais para o rolamento da roda de equação (2) sobre a estrada de equação (1).

- **Condições Iniciais:** No instante inicial $t = 0$, a roda e a estrada estão em contato num ponto $(0, y_0)$, com $y_0 < 0$, isto é,

$$x(0) = 0, \quad y(0) = y_0, \quad \theta(0) = -\frac{\pi}{2}, \quad r(-\frac{\pi}{2}) = -y_0. \tag{3}$$

- **Condição de rolamento sem deslize:** Embora a estrada permaneça estática durante o movimento, o ponto de contato entre a estrada e a roda percorre as duas curvas. A condição de não deslize corresponde à exigência de que, em cada instante, a distância percorrida na estrada pelo ponto de contato seja igual a distância percorrida pelo mesmo ponto na roda. Atendendo às expressões que permitem calcular o comprimento de curvas dadas em coordenadas paramétricas e em coordenadas polares, esta condição é dada pela igualdade

$$\int_0^t \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\theta(t)} \sqrt{(r(\theta))^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}\, d\theta, \quad \forall t \in I_1. \tag{4}$$

- **Condição de rolamento sem solavancos:** Para evitar solavancos, basta exigir que em cada instante o raio da roda (a distância do centro da roda ao ponto de contato) coincida com a profundidade da estrada. Esta condição, também chamada *condição do raio*, traduz-se pela relação

$$r(\theta(t)) = -y(t), \quad \forall t \in I_1. \tag{5}$$

3 Emparelhando rodas e estradas

Nesta secção deves mostrar como se pode obter a roda adequada a uma dada estrada e vice-versa. Para isso, procede como se indica nos quatro passos seguintes e justifica apropriadamente todos os cálculos.

1. Derive em ordem a t ambos os membros da condição de rolamento sem deslize (4) e em seguida eleve ao quadrado ambos os membros para obter

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = \left((r(\theta))^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2\right)\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2. \tag{6}$$

2. Agora, derive em ordem a t ambos os membros da condição do raio $r(\theta(t)) = -y(t)$ para obter

$$\frac{dr}{d\theta} = -\frac{dy}{dt}\frac{dt}{d\theta}. \tag{7}$$

3. Substitua (7) em (6) e simplifique para obter

$$\frac{d\theta}{dt} = \pm\frac{1}{y(t)}\frac{dx}{dt}.$$

4. Verifique os sinais das funções $y(t)$, $\theta'(t)$ e $x'(t)$ para concluir que

$$\frac{d\theta}{dt} = -\frac{1}{y(t)}\frac{dx}{dt}.$$

Esta equação é a chave para determinar a roda conhecida a estrada e para determinar a estrada conhecida a roda.

Sendo $x(t)$ e $y(t)$ funções conhecidas, então a equação anterior é uma equação diferencial de variáveis separadas que pode ser resolvida por simples integração.

3.1 Determinar a roda, conhecida a estrada

Do que ficou exposto anteriormente, se conhecermos as equações paramétricas $(x(t), y(t))$ de uma estrada, podemos resolver o problema de valor inicial:

$$\begin{cases} \dfrac{d\theta}{dt} = -\dfrac{1}{y(t)}\dfrac{dx}{dt} \\ \theta(0) = -\dfrac{\pi}{2} \end{cases} \tag{8}$$

para obter $\theta(t)$. Se esta função puder ser invertida para obter $t(\theta)$, então a roda correspondente é dada pela equação polar

$$r(\theta) = -y(t(\theta)). \tag{9}$$

Observação 3.1 *Se a estrada for dada pela equação cartesiana $y = f(x)$, podemos parametrizá-la por $x(t) = t$, $y(t) = f(t)$ e reduzir o problema à situação anterior. Neste caso, o problema de valor inicial (8) simplifica-se e dá origem a*

$$\begin{cases} \dfrac{d\theta}{dt} = -\dfrac{1}{y(t)} \\ \theta(0) = -\dfrac{\pi}{2} \end{cases}. \tag{10}$$

3.2 Determinar a estrada, conhecida a roda

Se conhecemos a equação polar da roda $r = r(\theta)$, a equação cartesiana da estrada é obtida sem dificuldade. Na verdade, atendendo à condição do raio, basta resolver o problema de valor inicial

$$\begin{cases} \dfrac{d\theta}{dx} = \dfrac{1}{r(\theta(x))} \\ \theta(0) = -\dfrac{\pi}{2} \end{cases}, \tag{11}$$

para obter a equação cartesiana da estrada

$$y(x) = -r(\theta(x)). \tag{12}$$

3.3 Mãos à obra

Agora podes mostrar que os pares (roda, estrada) que aparecem nos slides da Lição Delfos resultam da aplicação do emparelhamento mencionado nas secções anteriores.

Referências

[1] Maria Carvalho e Ana Oliveira, *Estradas para rodas exóticas*, Boletim da Sociedade Portuguesa de Matemática, Vol. 65 (Out. 2011), 1–17.

[2] Leon Hall e Stan Wagon, *Roads and Wheels*, Mathematics Magazine, Vol. 65, No. 5 (Dec. 1992), 283–301.

[3] http://demonstrations.wolfram.com/RoadsAndWheels/