A Lei de Planck:
a matemática das estrelas
(entre outros)

João Fernandes

Departamento Matemática UC

Observatório Geofísico e Astronómico UC

Centro de Investigação da Terra e do Espaço UC

(jmfernan@mat.uc.pt)

Introdução

- A Astronomia e a Astrofísica (séc. XIX) têm na sua base a Matemática e a Física
- Assim, parece uma tautologia falar de exemplos da Matemática no estudo do Universo
- Há exemplos apresentados frequentemente …

Introdução

- Determinação do raio da Terra por Eratosthenes (III-II a.C.) baseado na Astronomia
- Modelos heliocêntrio vs geocêntrico: “a batalha” dos séc. XVI e XVII
- As leis de Kepler (1609 e 1619)
- A descoberta de Neptuno por U. Leverrier e J. Galle (1846)
- Previsões da Teoria da Relatividade Geral de Einstein: avanço do periélio de Mercúrio e o desvio dos raios luminosos na presença de uma forte campo gravitacional (A. Eddington 1919)

Introdução

- **Determinação do raio da Terra por Eratosthenes (III-II a.C.) baseado na Astronomia**

- Modelos heliocêntrio vs geocêntrico: “a batalha” dos séc. XVI e XVII

- **As leis de Kepler (1609 e 1619)**

- A descoberta de Neptuno por U. Leverrier e J. Galle (1846)

- Previsões da Teoria da Relatividade Geral de Einstein: avanço do periélio de Mercúrio e o desvio dos raios luminosos na presença de uma forte campo gravitacional (A. Eddington 1919)

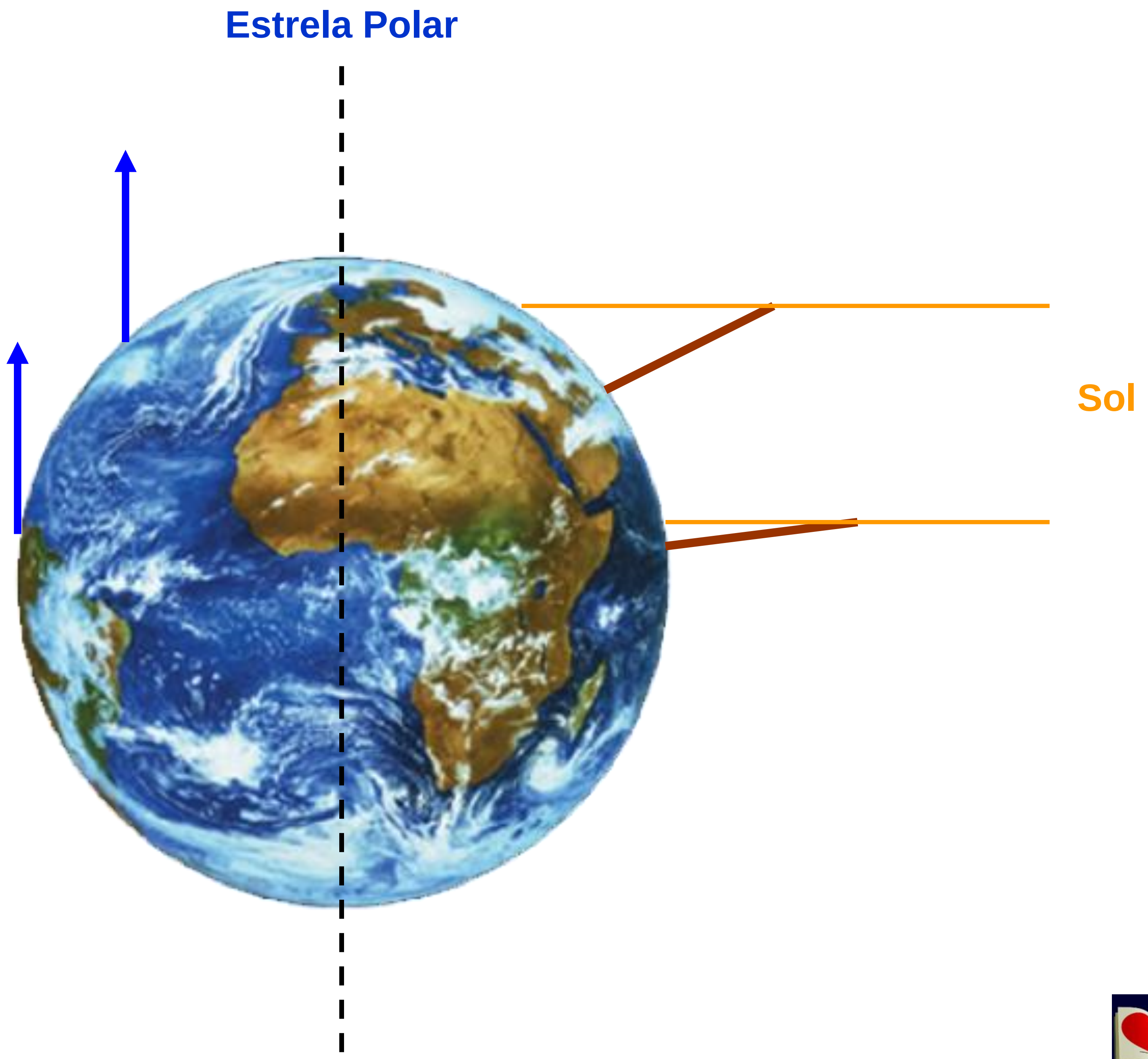
Determinação do raio da Terra

- Contrariamente ao que é frequente ouvir dizer, há muitos séculos que o Homem tem a percepção que a Terra não é plana. Duas experiências maiores conduzem a essa conclusão:
  - Desaparecimento dos barcos no horizonte
  - Comprimentos das sombras ou observação da estrela polar (em diferentes locais)

"*De sphaera mundi*"

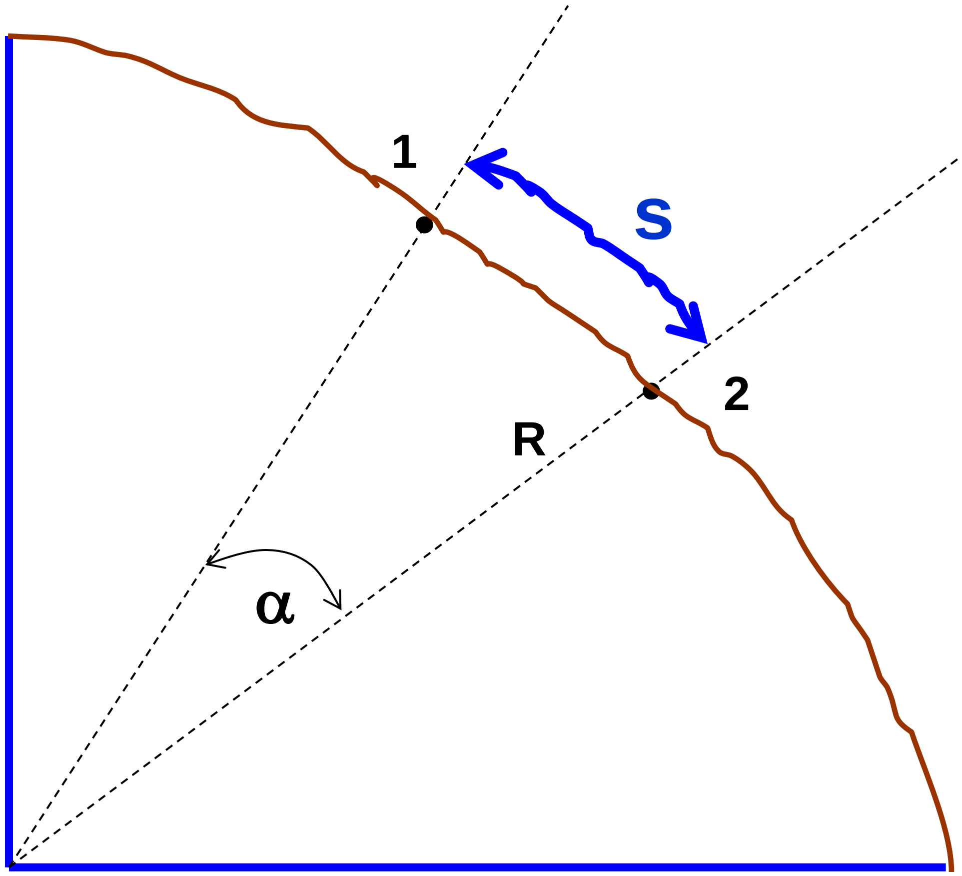
Sec. XIII de Sacrobosco (ed. de 1550)

http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/b/ba/Sacrobosco-1550-B3r-detail01.jpg


Estrela Polar
Sol

- Pitágoras (580 – 500 aC): terá sido o primeiro a propor a Terra curva, mas essencialmente por questões filosóficas ligadas à ideia de perfeição da figura esférica. Dificuldades:
  - medição raio (da esfera)
  - a “sustentabilidade” da água de rios e oceanos

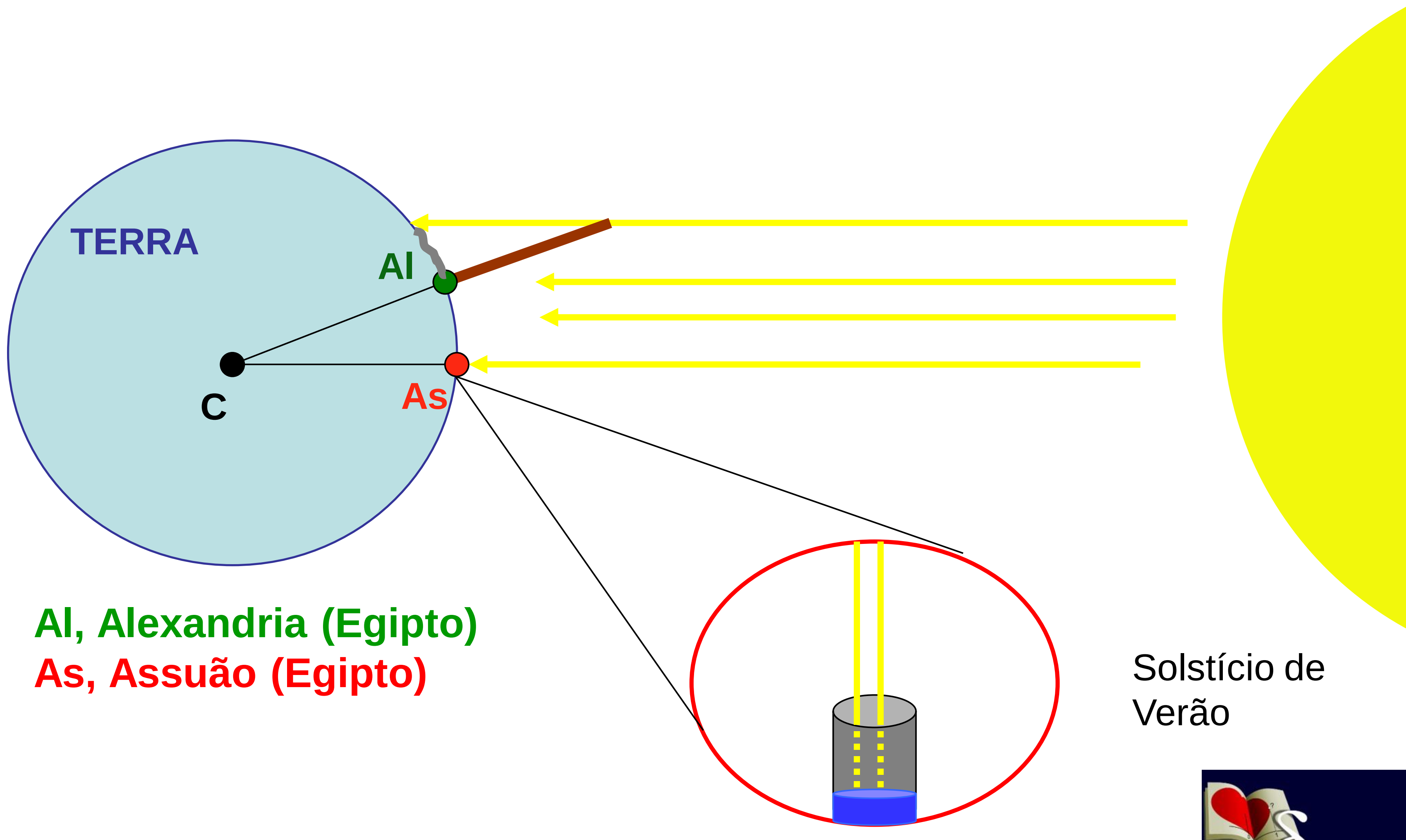
- Princípio da determinação experimental do Raio da Terra

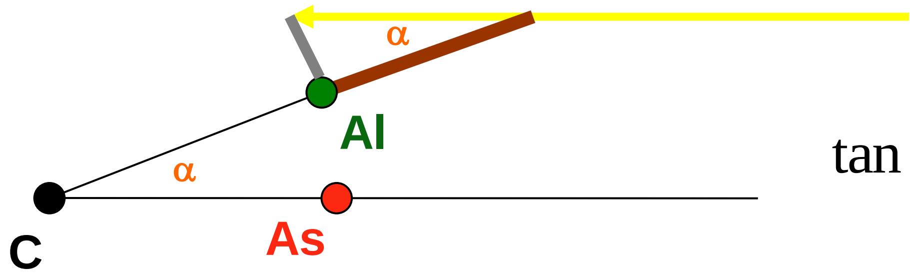


$$R = \frac{360^{o} \times s}{2\pi\alpha}$$

(276-195 a. C)

- Eratóstenes: originário de Cyrene (actualmente Líbia)
- Primeira determinação fiável da medição do raio da Terra
- Confirmando a ideia aristotélica (pitagóricas?) da Terra esférica
- Re-determinação por Posidonius (150 depois) usando a estrela Canopus


TERRA
Al
C
As
Al, Alexandria (Egipto)
As, Assuão (Egipto)
Solstício de
Verão



$$\tan\alpha = \frac{sombra}{altura} \Rightarrow \alpha \approx \frac{1}{50}\oplus(\approx 7.2^{o})$$

- Conhecido o ângulo importava, agora, saber o valor da distância entre Assuão e Alexandria. Erastónetes estimou 5000 estádios
  - Valor do estádio em km ? Hoje mal conhecido: 160 e 210 metros.
  - Distância: 800 – 1050 km

- Assim, usando a estimativa do Raio da Terra seria algo entre 6270 e 8400 km.

- Apesar da extraordinária coincidência com o valor actual (6378 km – raio equatorial), este resultado parece fruto de (em parte) do acaso. Fontes de erros
  - Medição da distância: camelos (!)
  - Assuão não tem exactamente a latitude de 23,5º mas 23º (solstício)
  - Assuão e Alexandria não estão sobre mesmo meridiano (longitudes: 32º 59’ O e 29º 52’ O)

- O importante é haver uma medida.

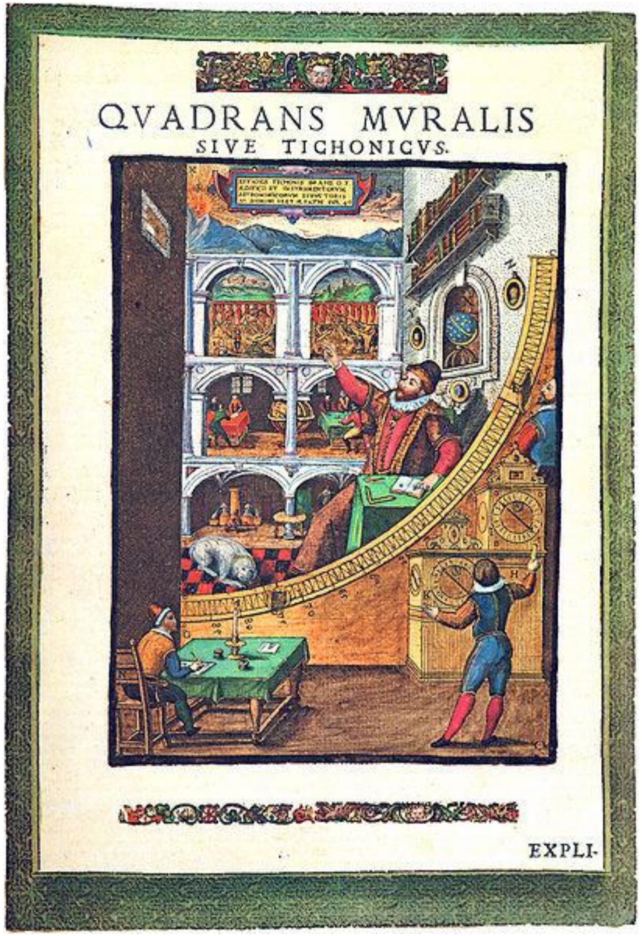
Leis de Kepler

J. Kepler

(1571-1630)

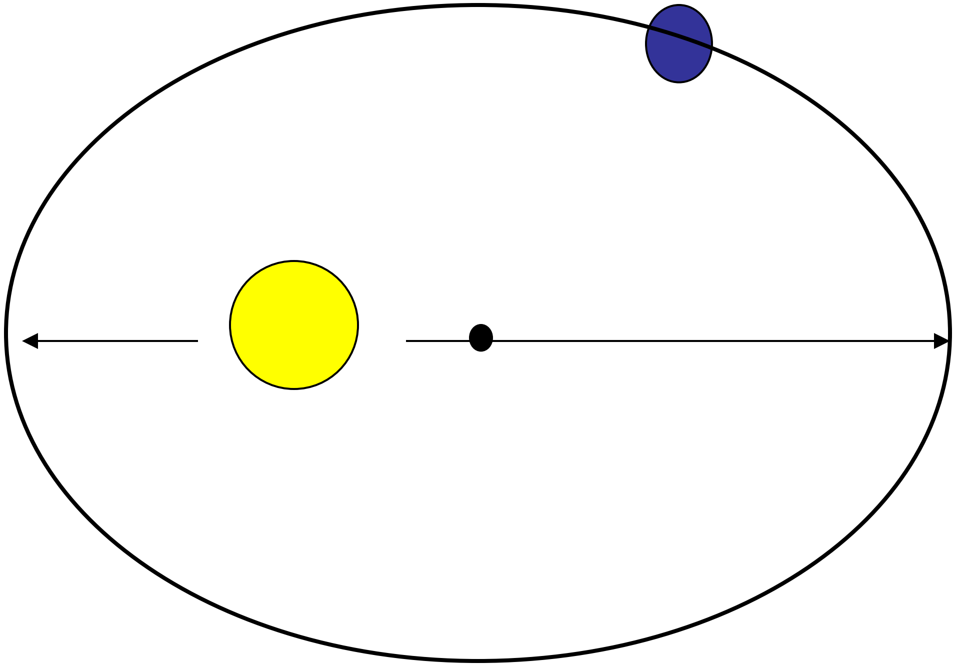
- Astronomia Nova (1609; primeira e segunda lei)
- "Harmonicis Mundi" (1619; terceira lei)


TYCHO BRAHE
JOHANNES KEPLER


QVADRANS MVRALIS
SIVE TICHONICVS.
EXPLI-

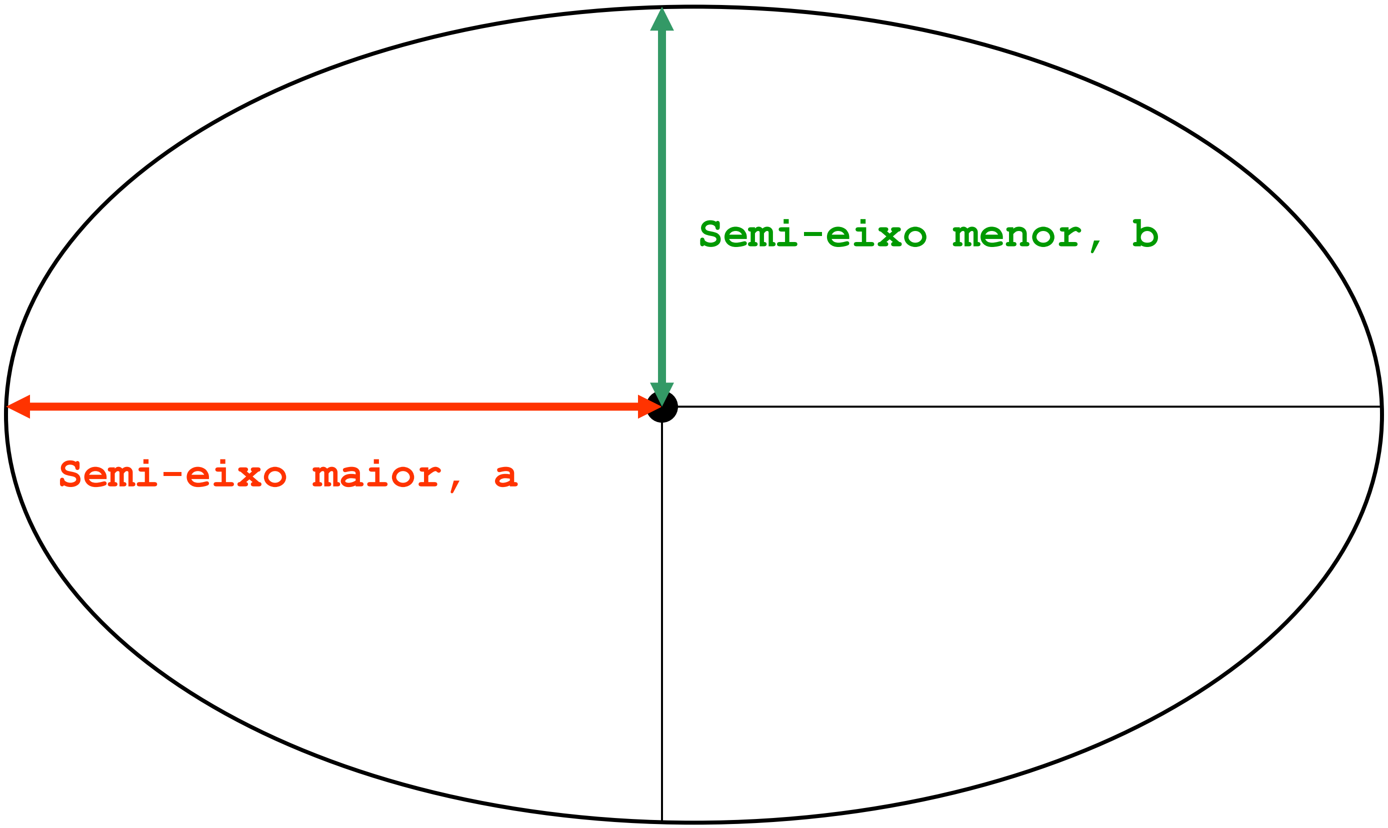
1ª Lei de Kepler

"Os planetas descrevem órbitas elípticas ocupando o Sol um dos focos"

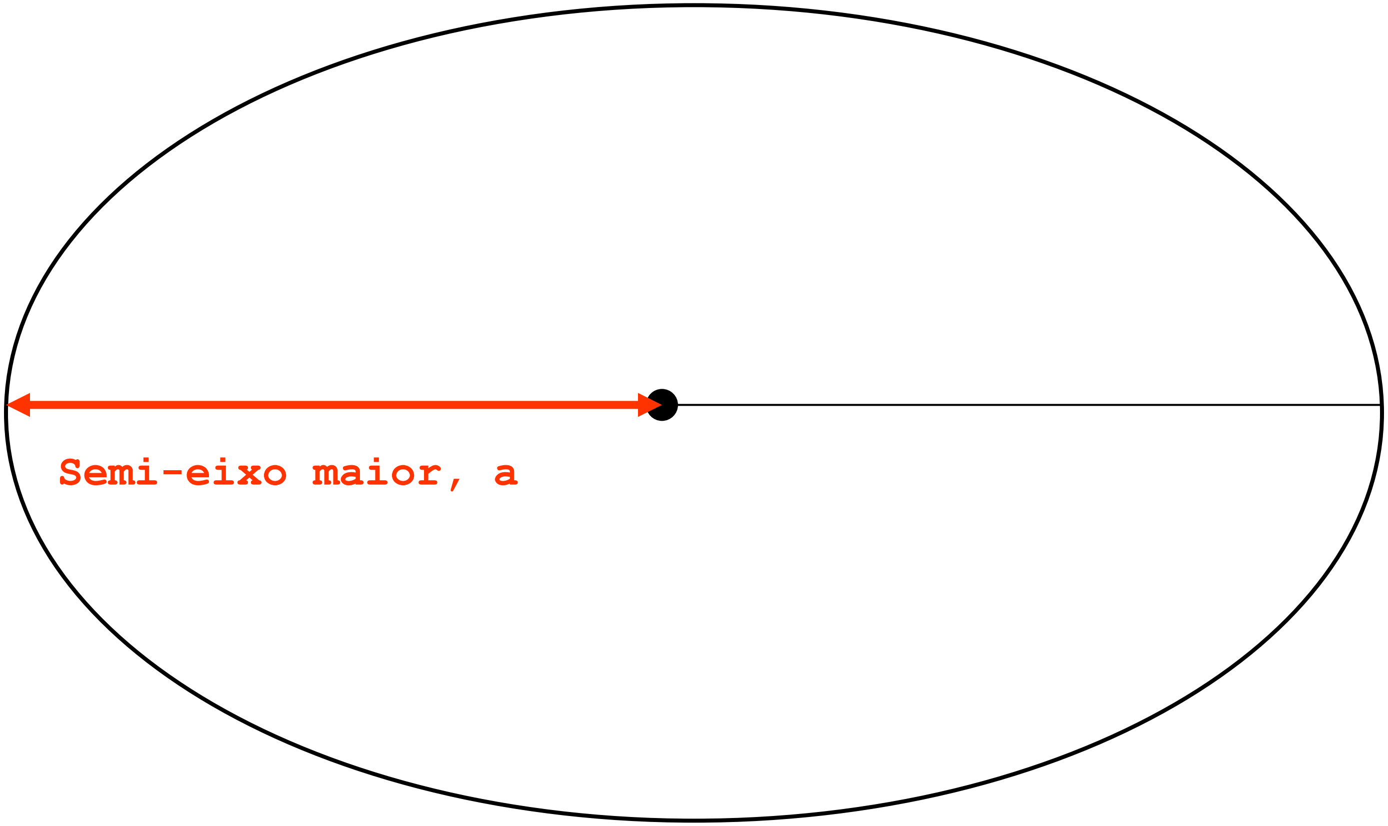


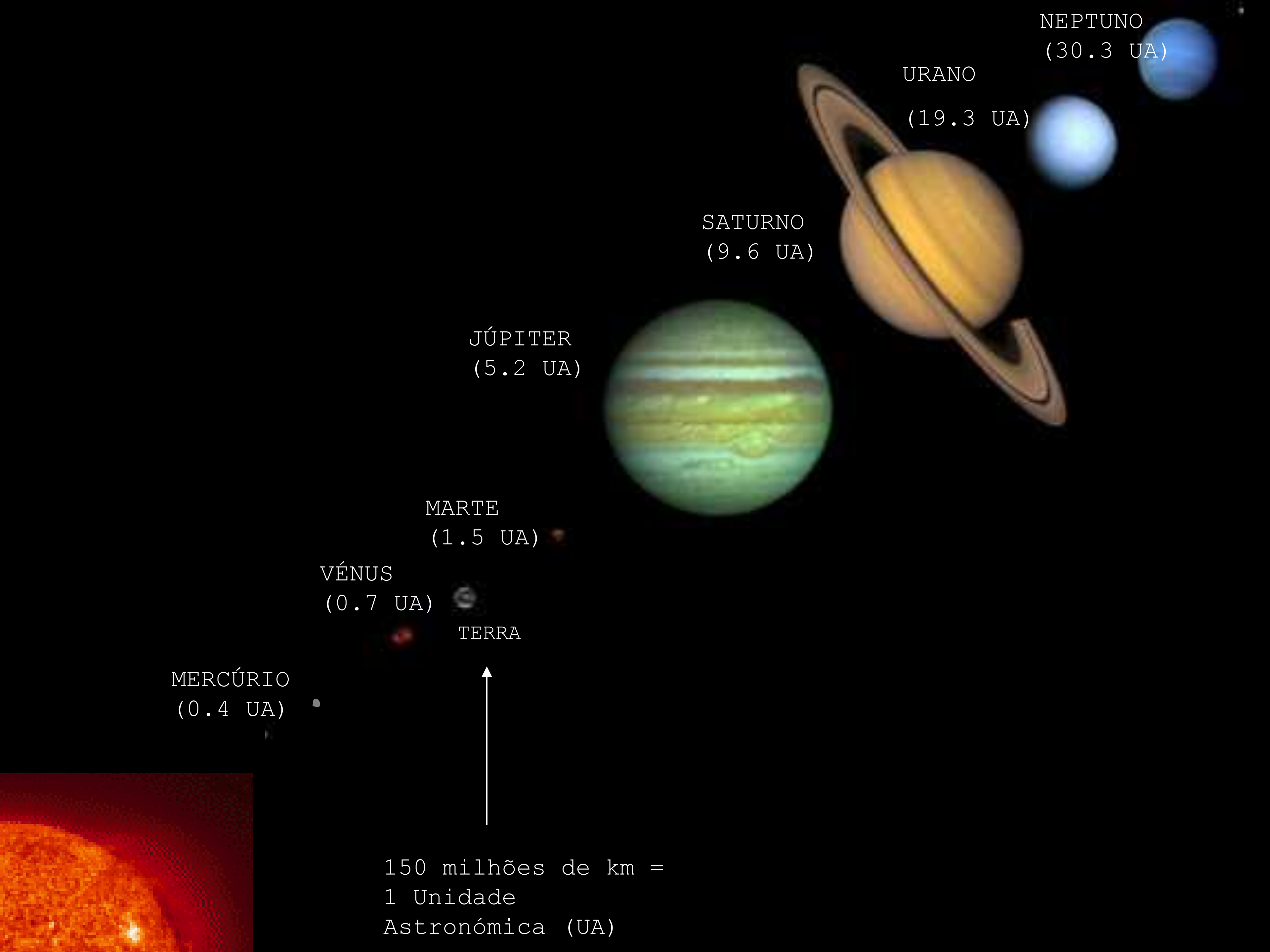
Distância Sol-Planeta é variável!

As elipses:

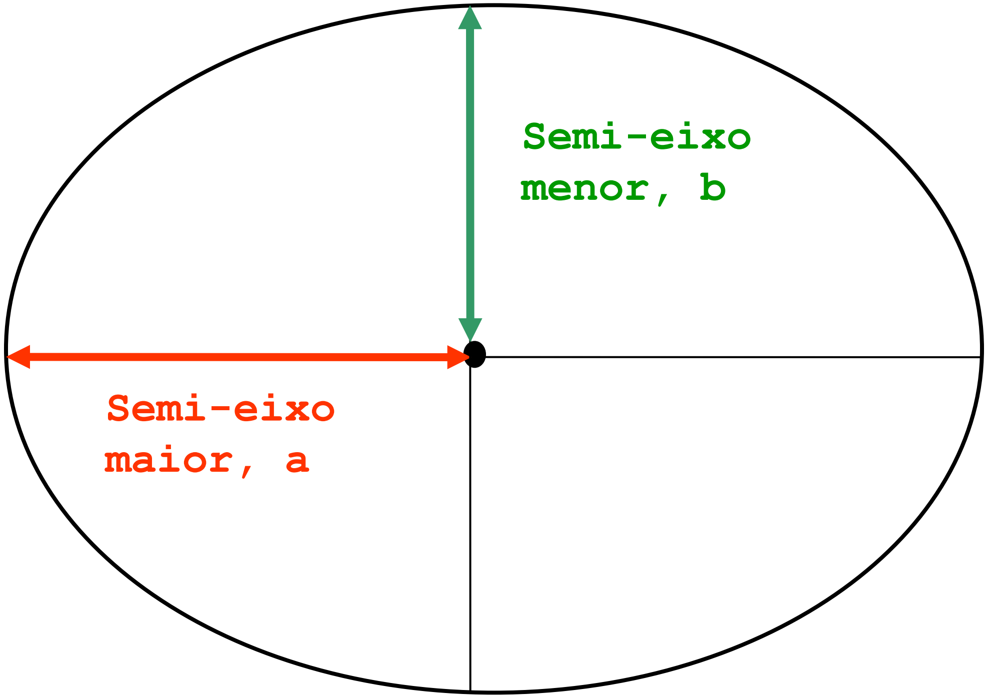


As elipses:




NEPTUNO
(30.3 UA)
URANO
(19.3 UA)
SATURNO
(9.6 UA)
JÚPITER
(5.2 UA)
MARTE
(1.5 UA)
VÉNUS
(0.7 UA)
TERRA
MERCÚRIO
(0.4 UA)
150 milhões de km =
1 Unidade
Astronómica (UA)

As elipses:



Excentricidade

$$e = \sqrt{1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2} < 1$$

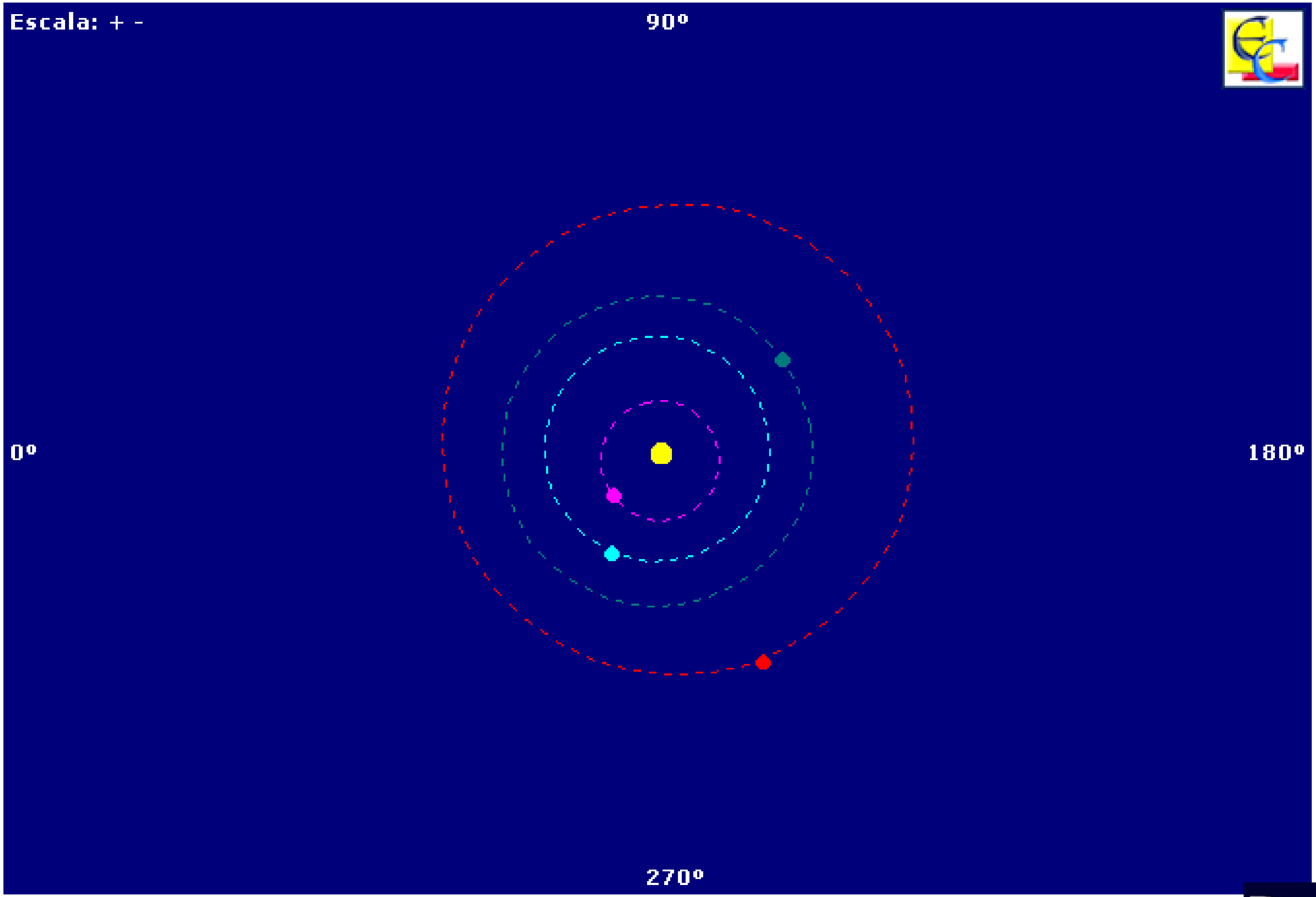
Nota: e = 0
para a
circunferência

Os planetas solares (1ª Lei de Kepler)

Planeta	**e**
Mercúrio	0.2056
Vénus	0.0068
Terra	0.0168
Marte	0.0933
Júpiter	0.0481
Saturno	0.0509
Urano	0.0473
Neptuno	0.0069

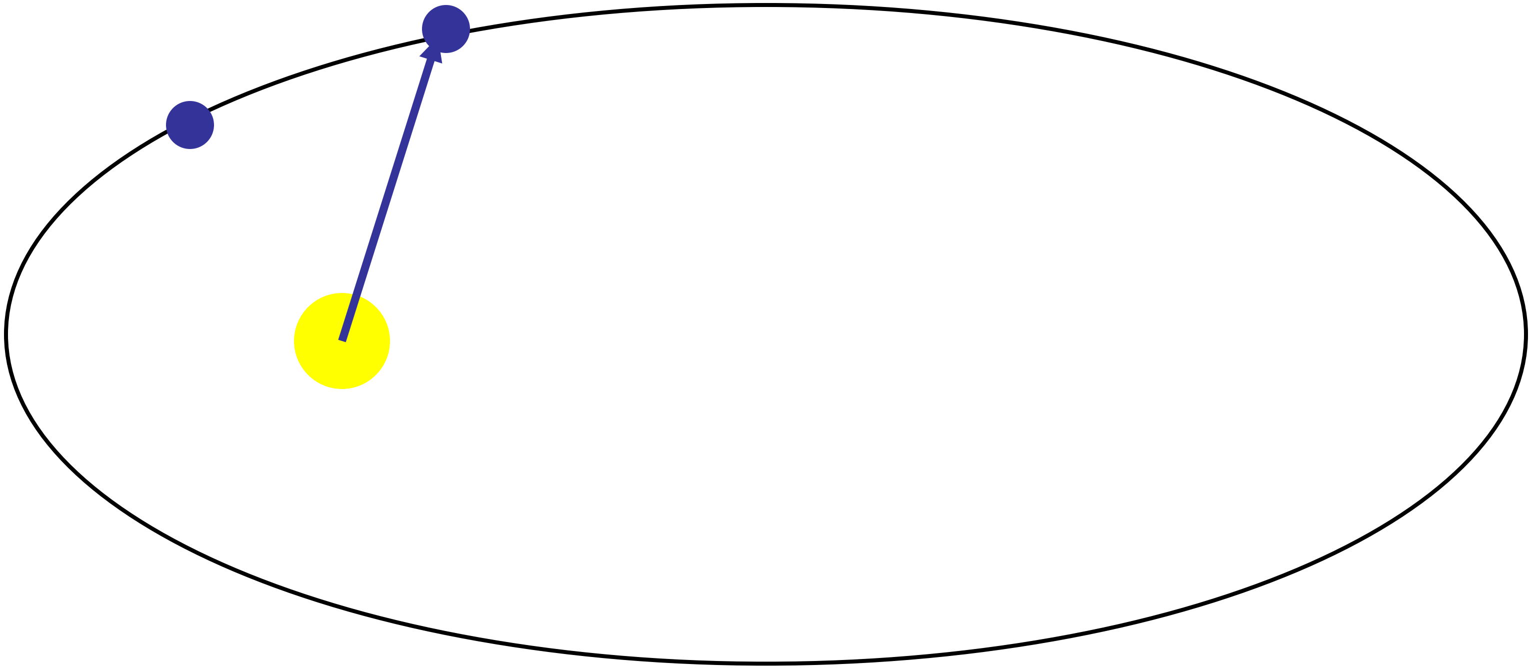
Órbitas quase circulares !

Os planetas solares (1ª Lei de Kepler)

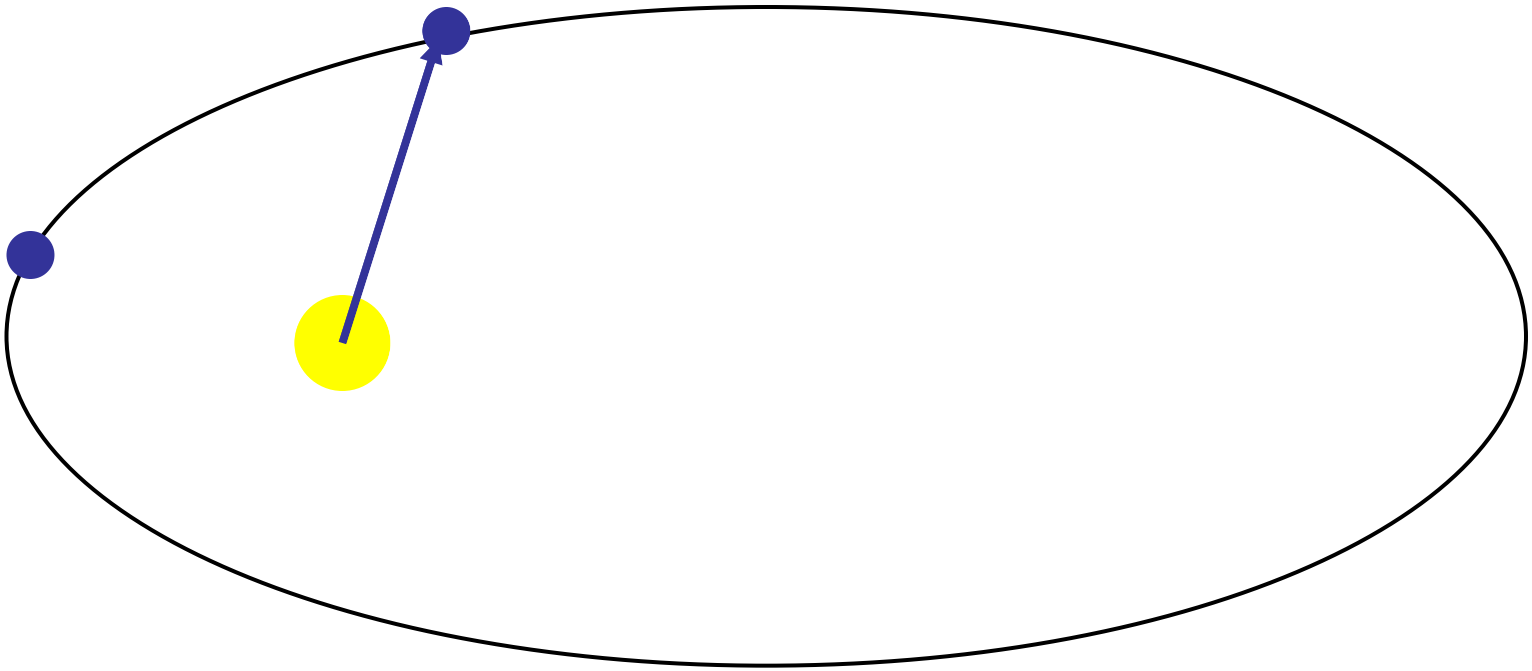


2ª Lei de Kepler

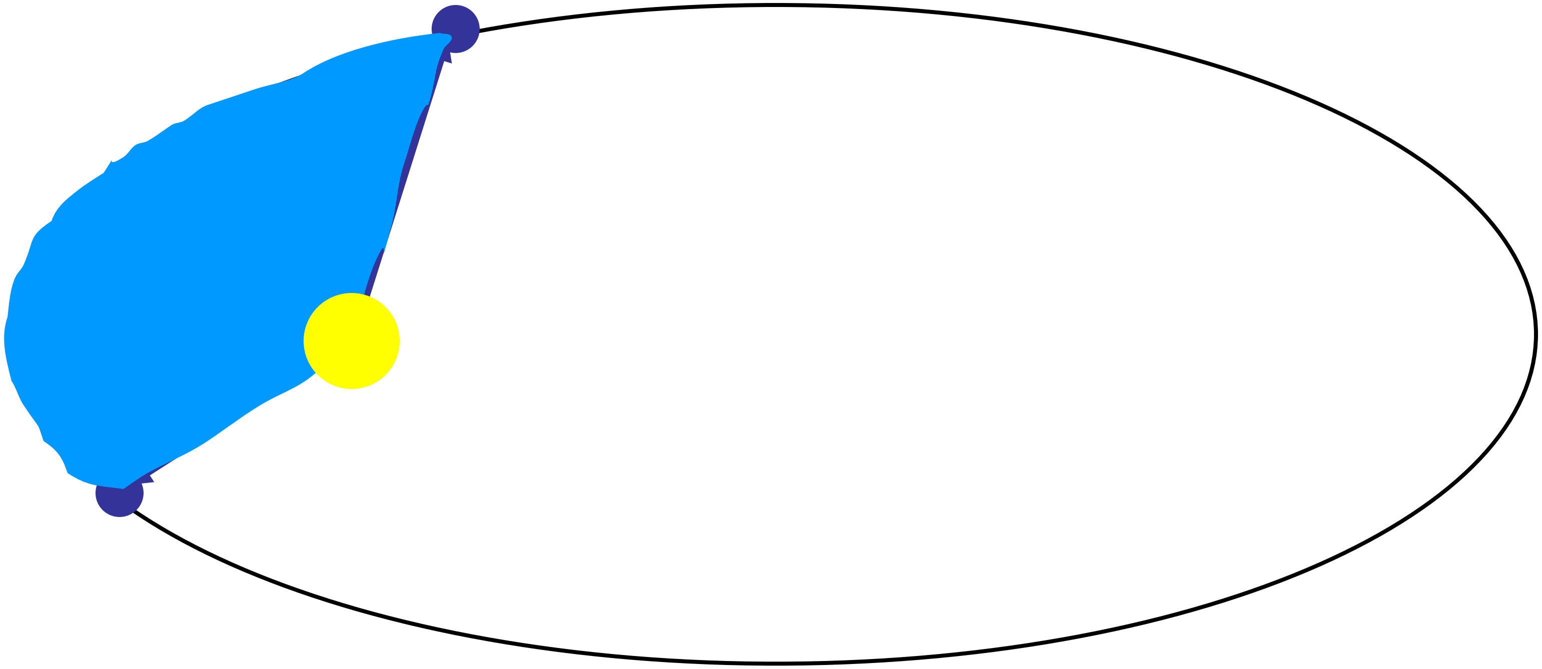
"O vector Sol-Planeta varre áreas iguais em tempos iguais"



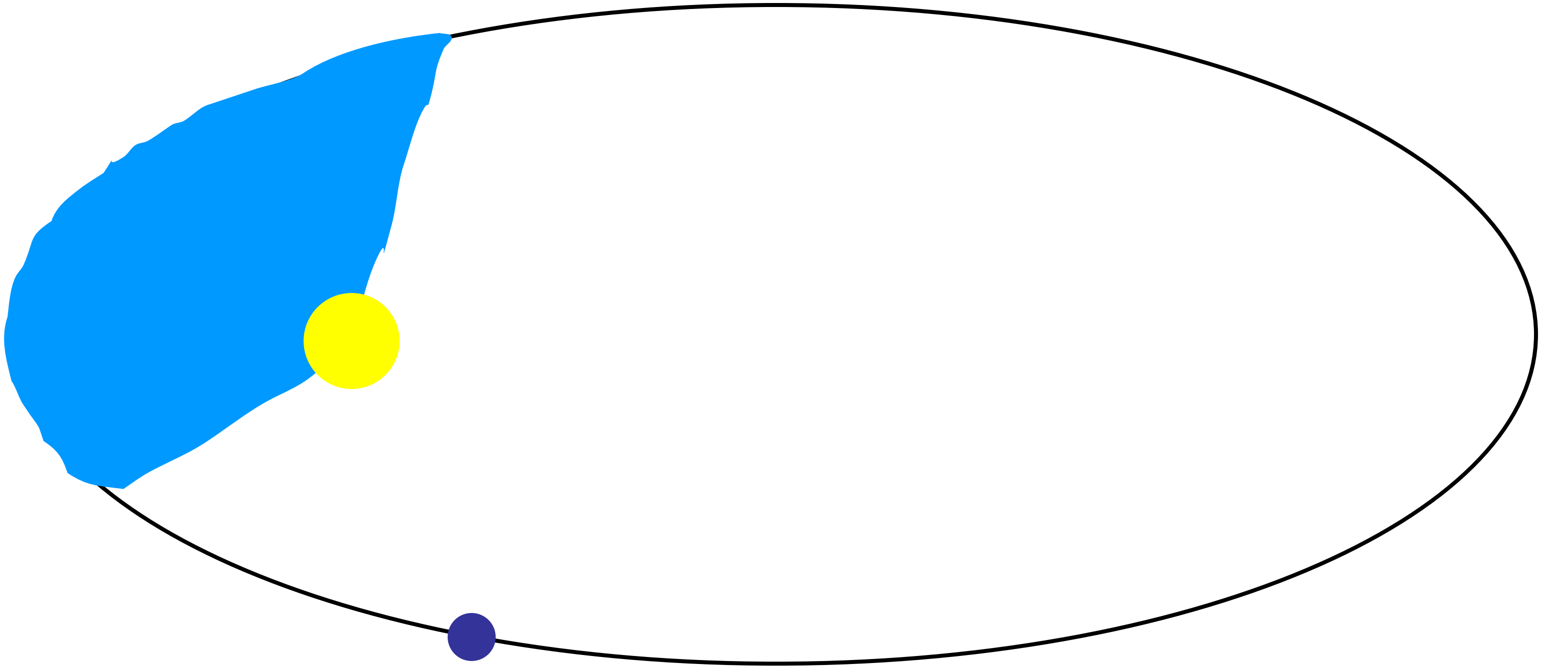
"O vector Sol-Planeta varre áreas iguais em tempos iguais"



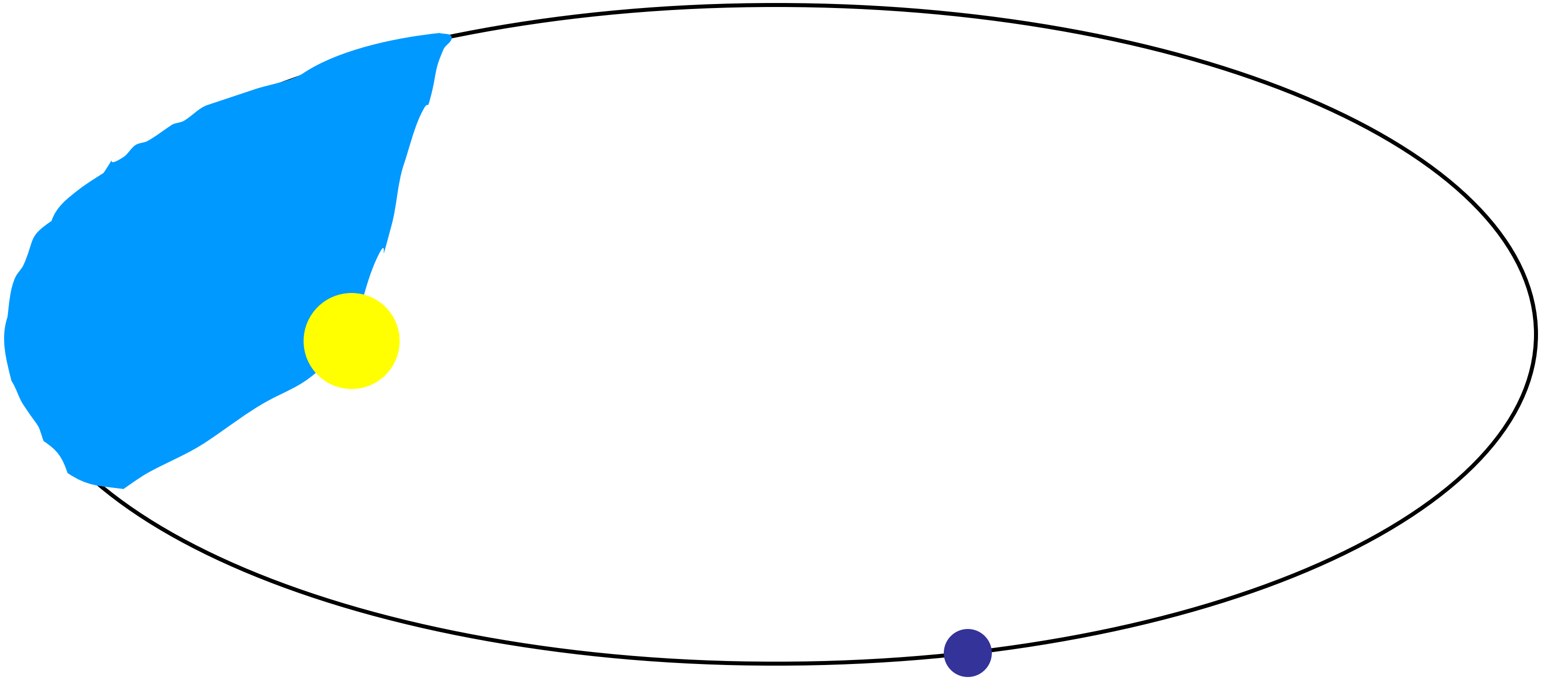
"O vector Sol-Planeta varre áreas iguais em tempos iguais"



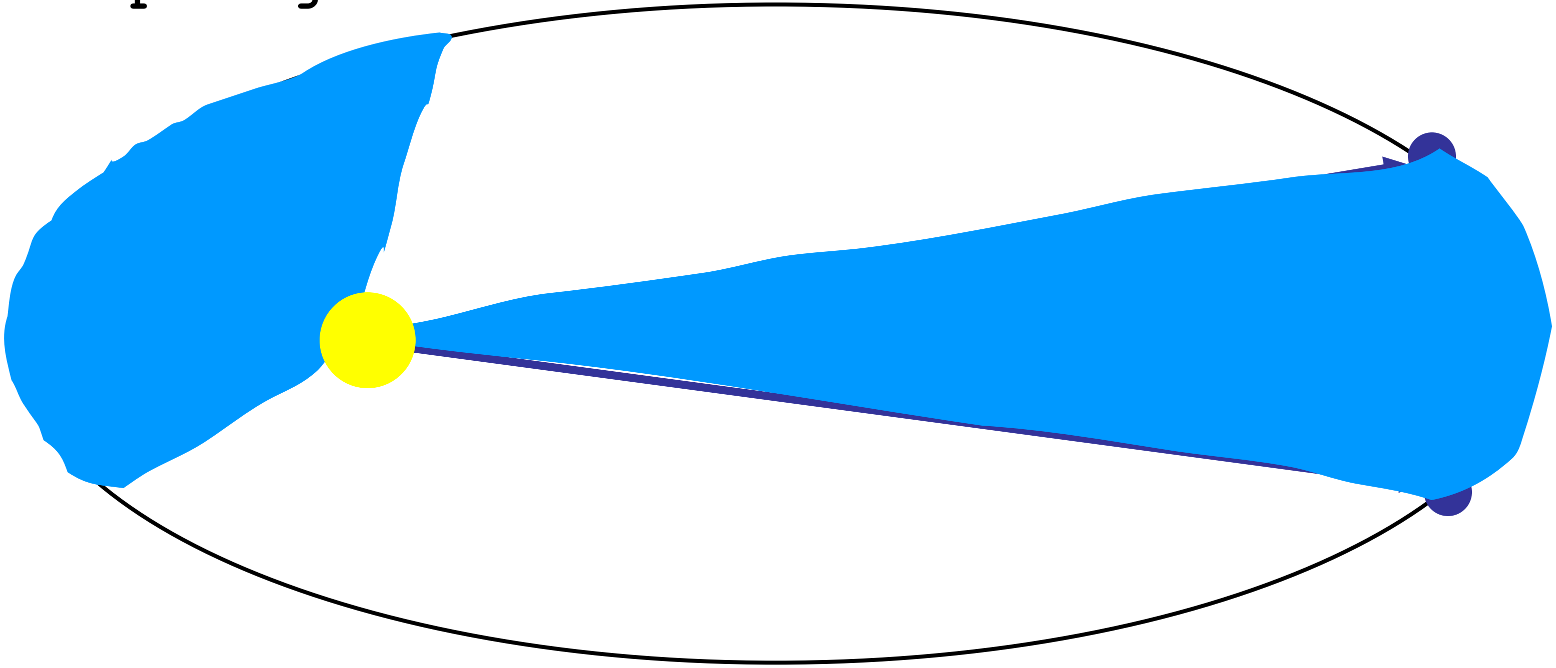
“O vector Sol-Planeta varre áreas iguais em tempos iguais”



“O vector Sol-Planeta varre áreas iguais em tempos iguais”



"O vector Sol-Planeta varre áreas iguais em tempos iguais"



O Planeta aumenta a sua velocidade quando se aproxima do Sol (simulação)

Os planetas solares (3ª Lei de Kepler)

Planeta	P (anos)	a (UA)	P^2/a^3
Mercúrio	0.24085	0.387099	1.000063
Vénus	0.61519	0.723326	1.000038
Terra	1.0000	1.000018	0.999946
Marte	1.8807	1.523638	0.999985
Júpiter	11.861	5.20248	0.999106
Saturno	29.570	9.56329	0.999725
Urano	84.746	19.2937	0.999981
Neptuno	166.57	30.2743	0.999934

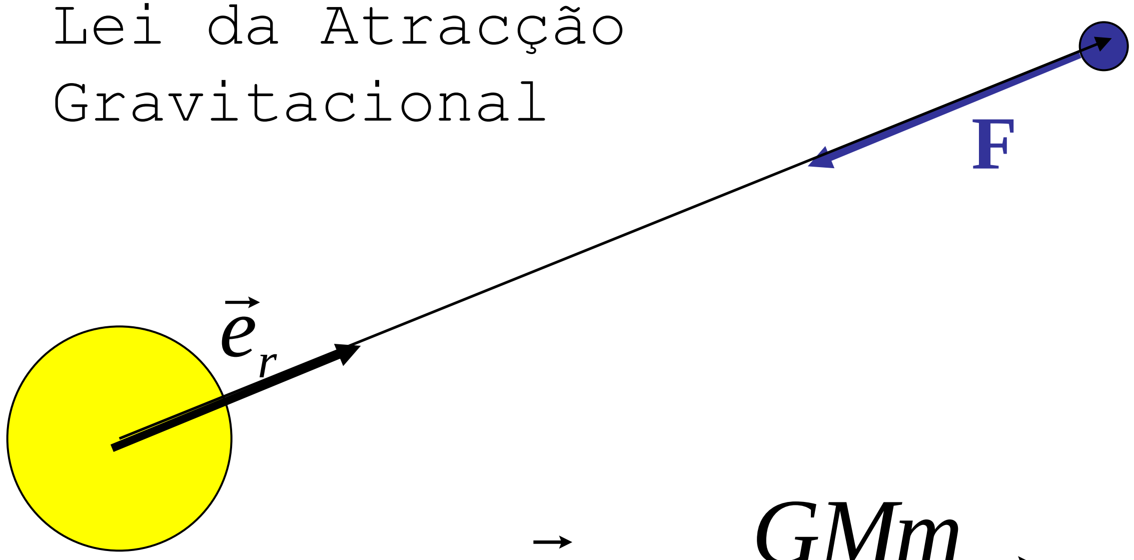
3ª Lei de Kepler

"O quociente do quadrado do período órbital pelo cubo do semi-eixo maior é constante"

$$\frac{P^2}{a^3} = \text{constante}$$

Leis de Kepler e Isacc Newton

Lei da Atracção Gravitacional



$$\vec{F} = -\frac{GMm}{r^2}\vec{e}_r$$

(1647-1727)

$$\vec{F} = -\frac{GMm}{r^2}\vec{e}_r$$

$$\vec{F} = m\vec{a} = m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$$

$$\boxed{\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = -\frac{GM}{r^2}}$$

$$r = \frac{p}{1 + e\cos\theta}$$

$$\frac{P^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{GM}$$

A lei (de Planck) e as estrelas ...

Max Karl Ernst Ludwig Planck

(Kiel, 23 de Abril de 1858 — Göttingen, 4 de Outubro de 1947)

Nobel de Física de 1918
(mecânica quântica)

A lei (de Planck) e as estrelas ...

$$B(\lambda) = \frac{2\pi h c^2}{\lambda^5 \left[e^{\frac{hc}{k\lambda T}} - 1 \right]}$$

k, constante de Boltzmann $= 1.38 \times 10^{-23}\ JK^{-1}$

h, constante de Plank $= 6.62 \times 10^{-34}\ Js$

c, velocidade da luz $= 300000$ km/s

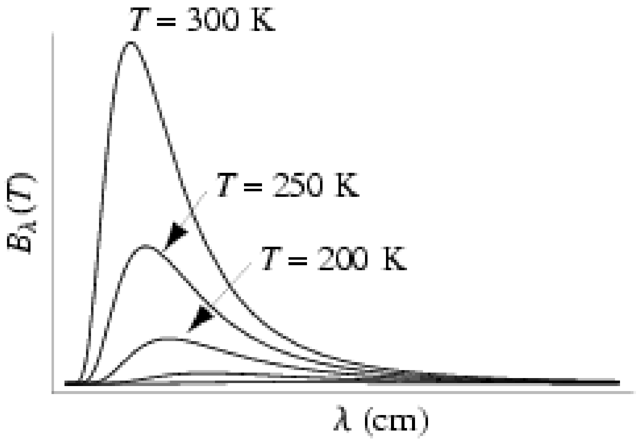
Lei de Planck

Nota : 0ºC = 273 K

A lei (de Planck) e as estrelas …

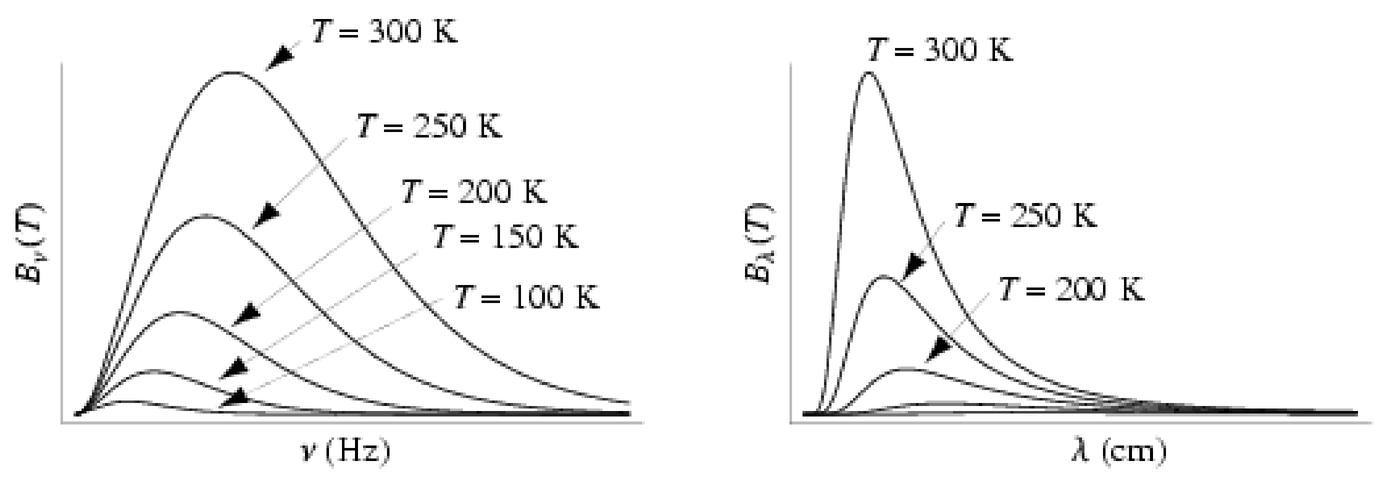
- Radiação emitida por um corpo negro !
  - Absorve toda a radiação que lhe é dirigida (nada reflectindo)

Nota : $\lambda \times \nu = c$



A lei (de Planck) e as estrelas …

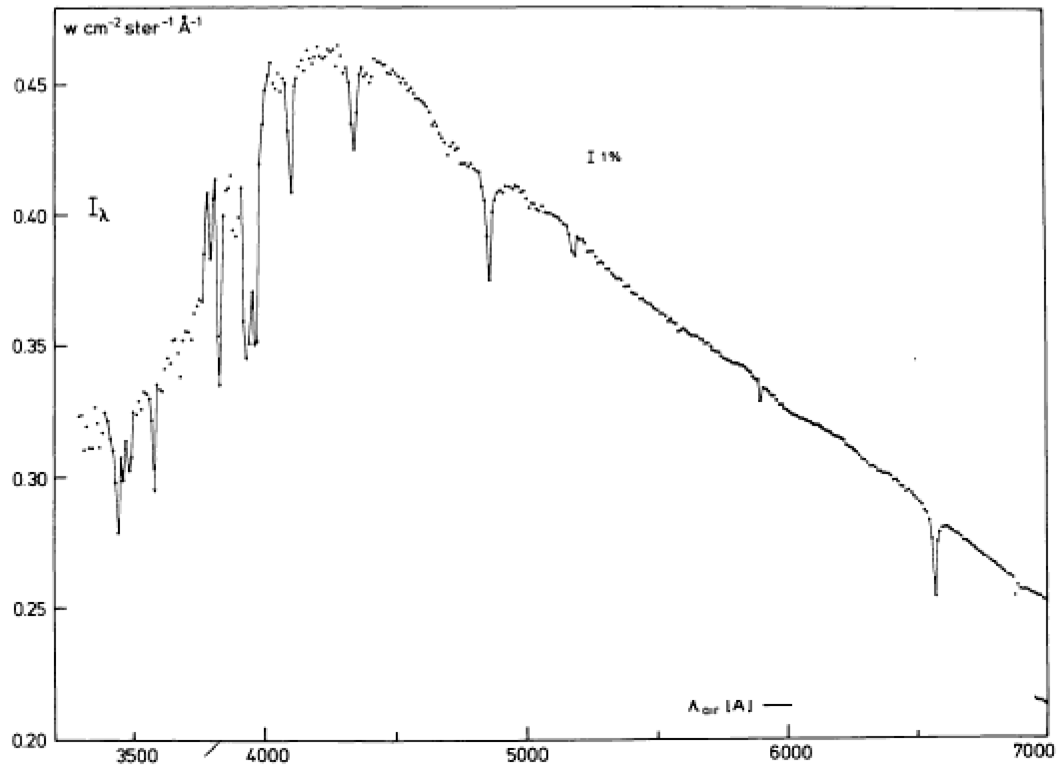
- Radiação emitida por um corpo negro !
  - Absorve toda a radiação que lhe é dirigida (nada reflectindo)



Nota : $\lambda \times \nu = c$

A lei (de Planck) e as estrelas …

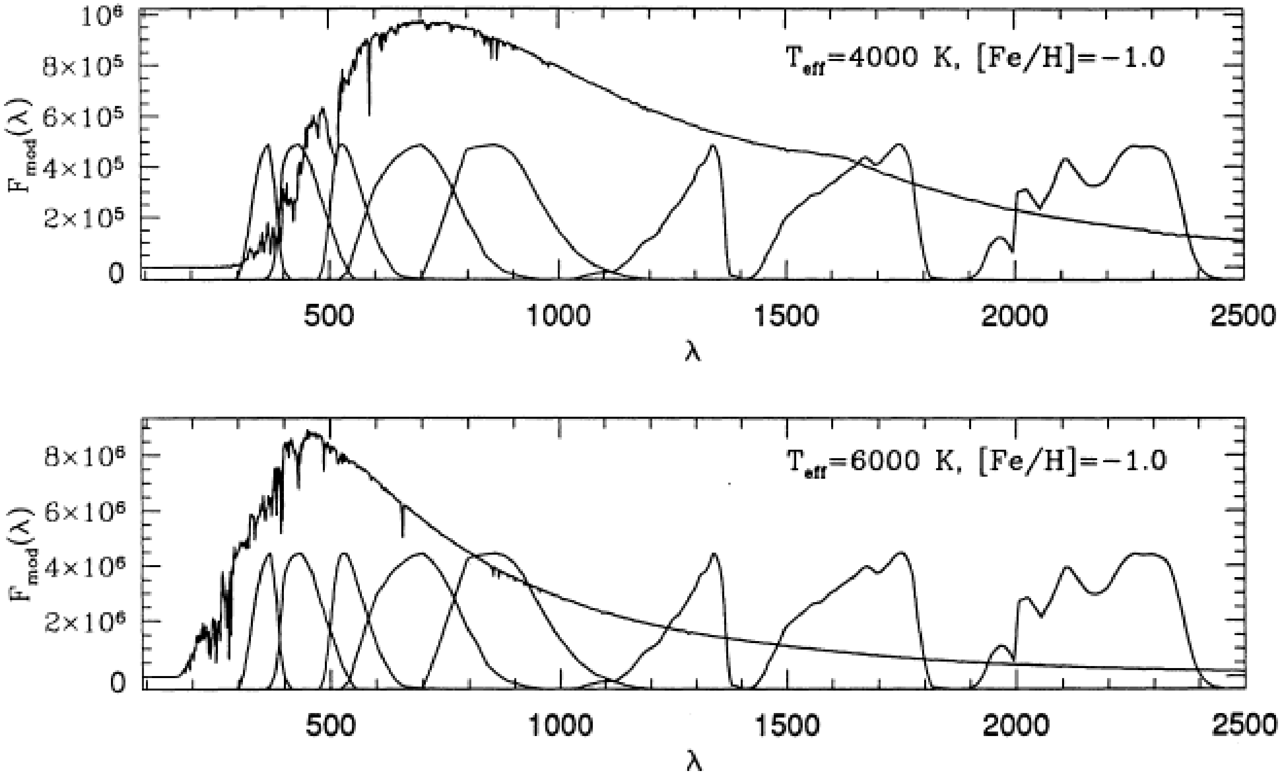
- O Sol parece um … corpo negro !



Neckel, H. & Labs, D. (84)

A lei (de Planck) e as estrelas ...

- … e as outras estrelas também.

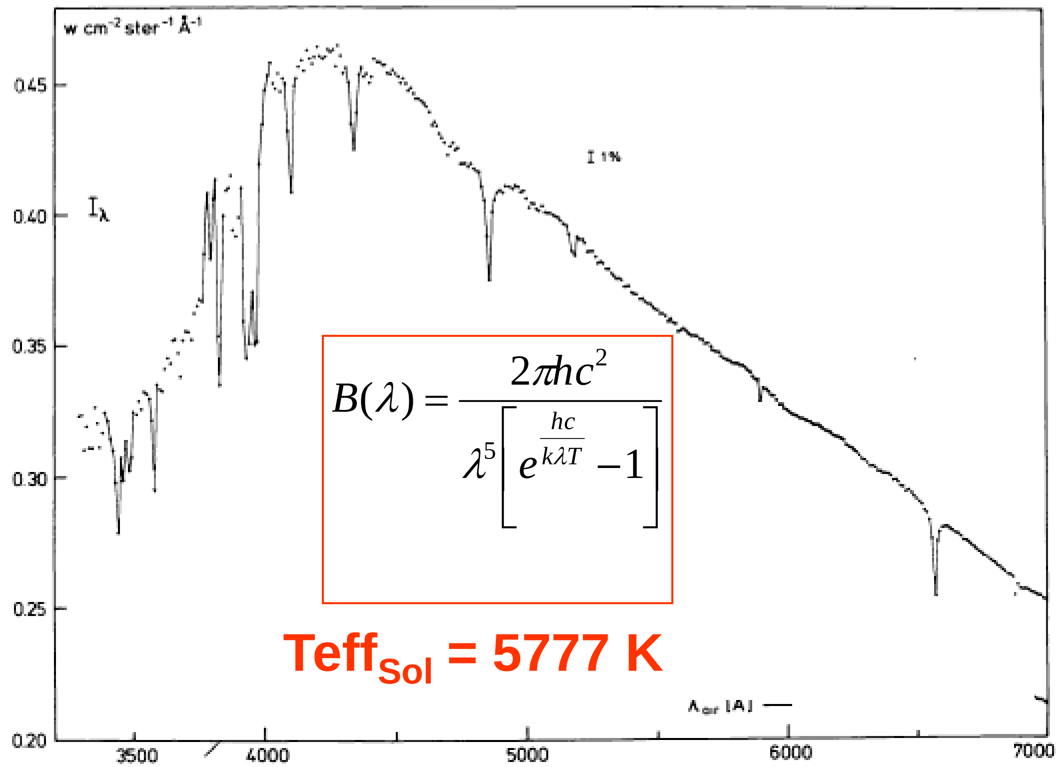


Alosno et al. (96)

A lei (de Planck) e as estrelas

...

- Temperatura da (Efectiva) estrela, Teff

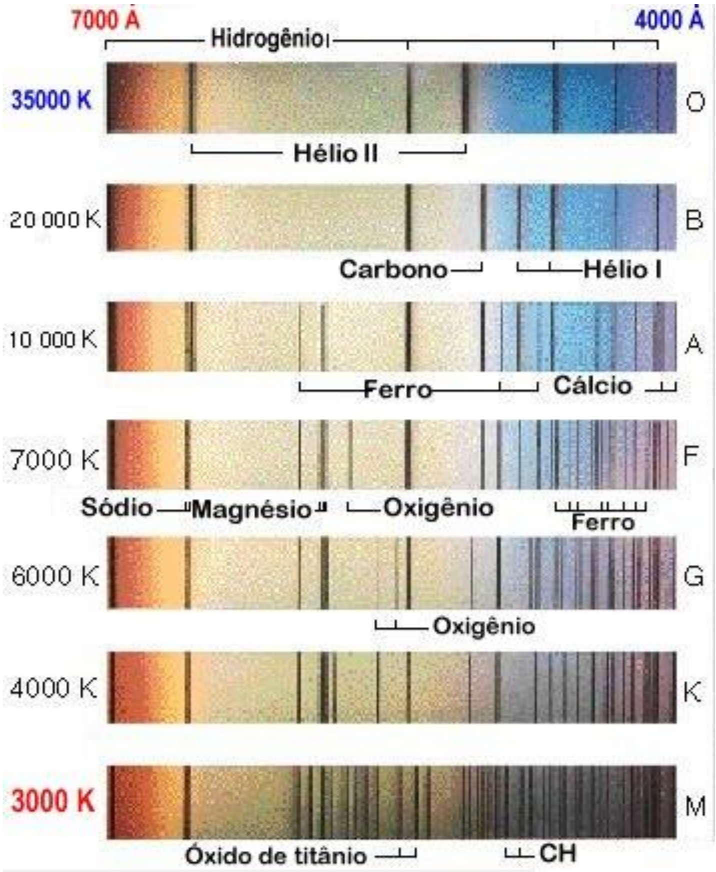


$$B(\lambda) = \frac{2\pi hc^2}{\lambda^5\left[e^{\frac{hc}{k\lambda T}} - 1\right]}$$

Teff$_{Sol}$ = 5777 K

A lei (de Planck) e as estrelas …

- Temperatura da (Efectiva) estrela, Teff



A lei (de Planck) e as estrelas

...

$$\int_0^\infty B_\lambda(T)\, d\lambda = \int_0^\infty \frac{2\pi hc^2}{\lambda^5\left[e^{\frac{hc}{k\lambda T}} - 1\right]}\, d\lambda = 2\pi hc^2 \int_0^\infty \frac{1}{\lambda^5\left[e^{\frac{hc}{k\lambda T}} - 1\right]}\, d\lambda$$

$$u = \frac{hc}{\lambda kT} \qquad \Rightarrow d\lambda = -\frac{hc}{u^2 kT} du,$$

$$= \frac{2\pi k^4 T^4}{h^3 c^2} \int_0^\infty \frac{u^3}{e^u - 1}\, du$$

δelfos

A lei (de Planck) e as estrelas ...

- Fluxo total da estrela (contribuição de todos os comprimentos de onda)

$$\boxed{\zeta(x) \equiv \frac{1}{\Gamma(x)} \int_0^\infty \frac{u^{x-1}}{e^u - 1}\, du,}$$

Função Zeta de Riemann

$$\int_0^\infty \frac{u^3}{e^u - 1}\, du = \zeta(4)\Gamma(4) = \frac{\pi^4}{90} 3! = \frac{\pi^4}{15}$$

Lei de Stefan Boltzmann

$$\boxed{\int_0^\infty B_\lambda d\lambda = \sigma T_{eff}{}^4}$$

$\sigma = 5.67 \times 10^{-5}$ erg cm^{-2}s^{-1}K^{-4}

A lei (de Planck) e as estrelas

...

- A cor das estrelas

Central Region of Globular Cluster Messier 4

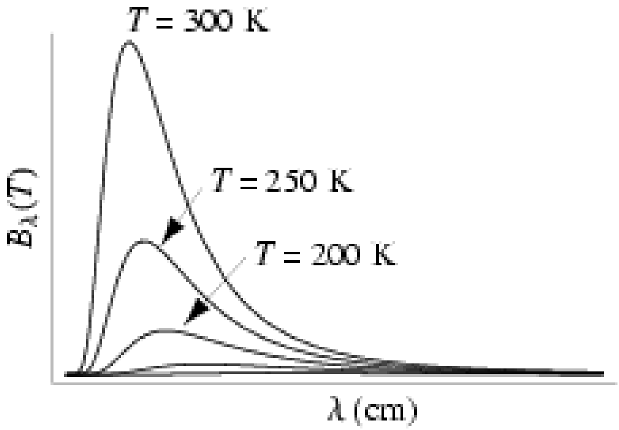
VLT UT1 First Light Photo No.3 European Southern Observatory

A lei (de Planck) e as estrelas

...

- A cor das estrelas

$$\frac{dB_\lambda(T)}{d\lambda} = \frac{d}{d\lambda}\left[\frac{2\pi hc^2}{\lambda^5\left[e^{\frac{hc}{k\lambda T}}-1\right]}\right] = 2\pi hc^2\frac{d}{d\lambda}\left[\frac{1}{\lambda^5\left[e^{\frac{hc}{k\lambda T}}-1\right]}\right] = 0$$



$$-5\left(e^{\frac{hc}{k\lambda T}}-1\right)+\frac{hc}{kT\lambda}e^{\frac{hc}{k\lambda T}} = 0$$

A lei (de Planck) e as estrelas

...

- A cor das estrelas

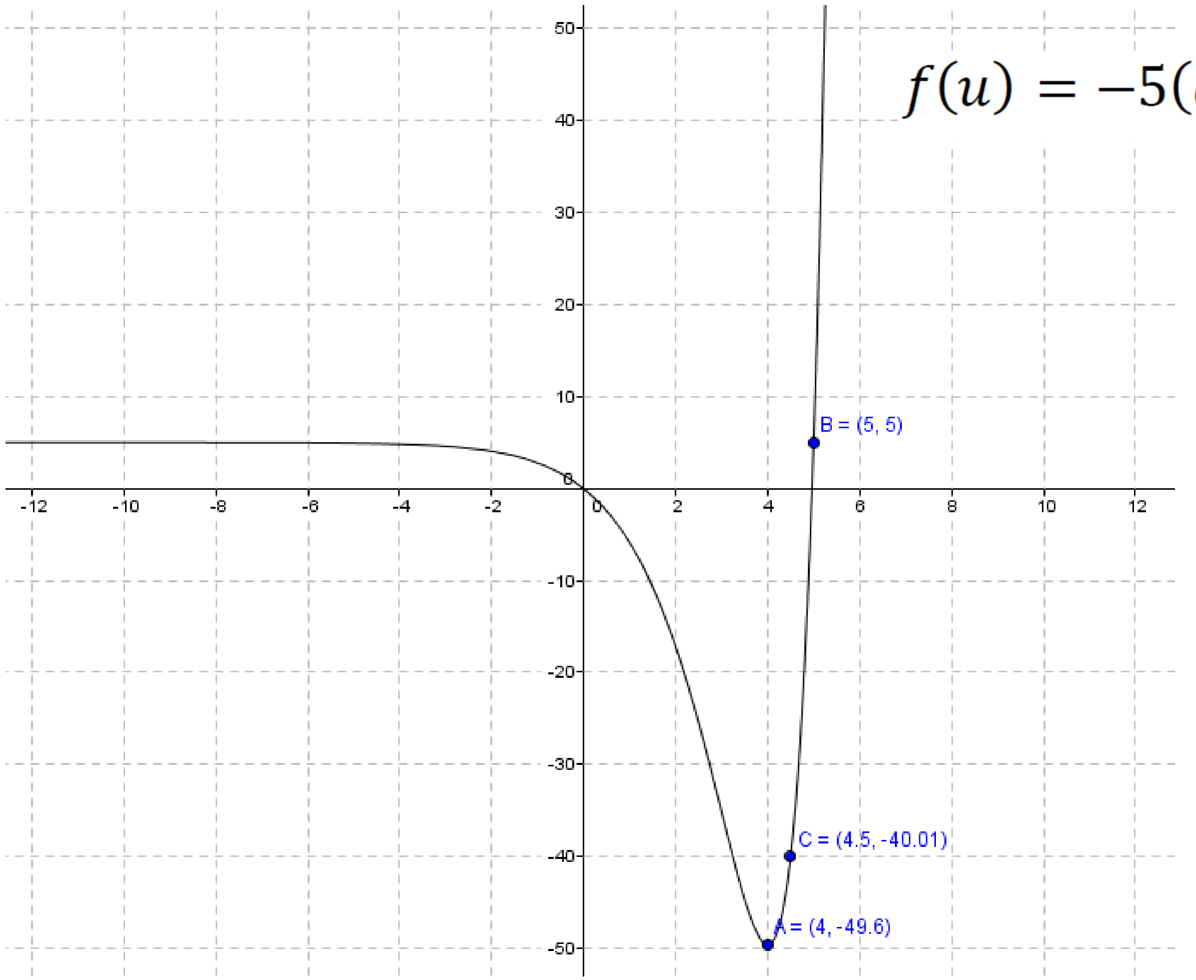
$$\boxed{u = \frac{hc}{kT\lambda}} \qquad -5(e^u - 1) + ue^u = 0$$

$$\lambda_{max} = \frac{hc}{4.965114kT} = \frac{2.898550 \times 10^{-6}(km\ K)}{T}$$

Ϭelfos

A lei (de Planck) e as estrelas

...



$$f(u) = -5(e^u - 1) + ue^u$$

@Danielle de Freitas

A lei (de Planck) e as estrelas

...

$$-5(e^u - 1) + ue^u = 0 \Leftrightarrow -5(e^u - 1) = -ue^u \Leftrightarrow u = \frac{5(e^u - 1)}{e^u}$$

$$u_{m+1} = \frac{5(e^{u_m} - 1)}{e^{u_m}}, m = 0, 1, \ldots$$

$$|u_{m+1} - u_m| \leq 10^{-5}$$

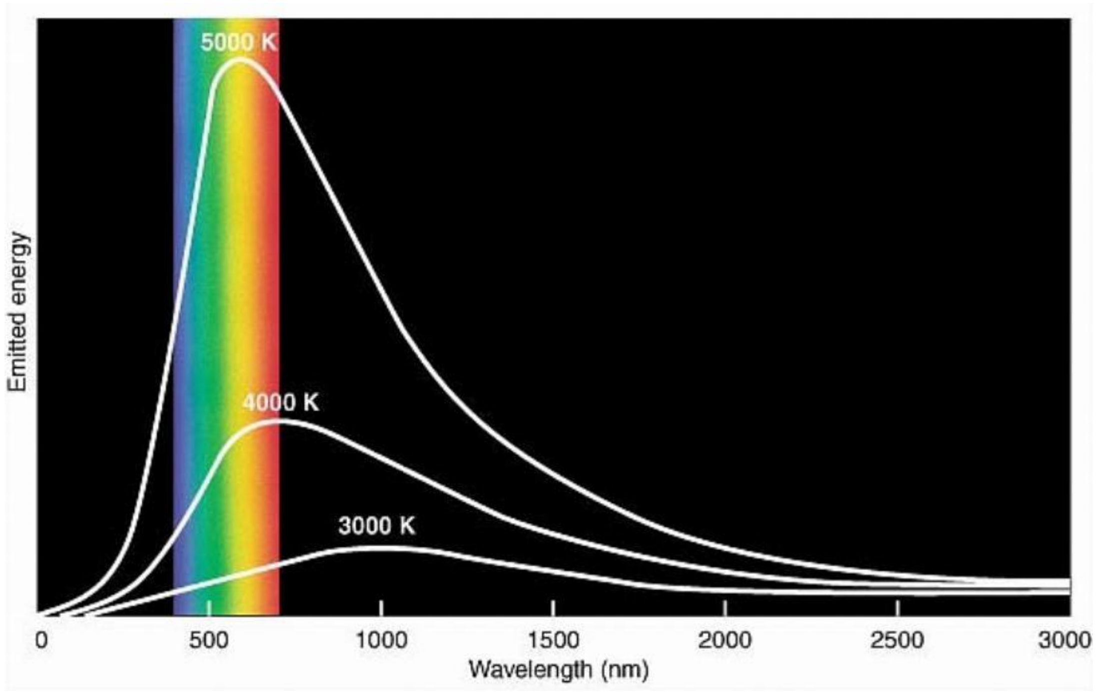
@Danielle de Freitas

δelfos

A lei (de Planck) e as estrelas ...

- A cor das estrelas

$$\lambda_{max} = \frac{hc}{4.965114kT} = \frac{2.898550 \times 10^{-6}(km\ K)}{T}$$

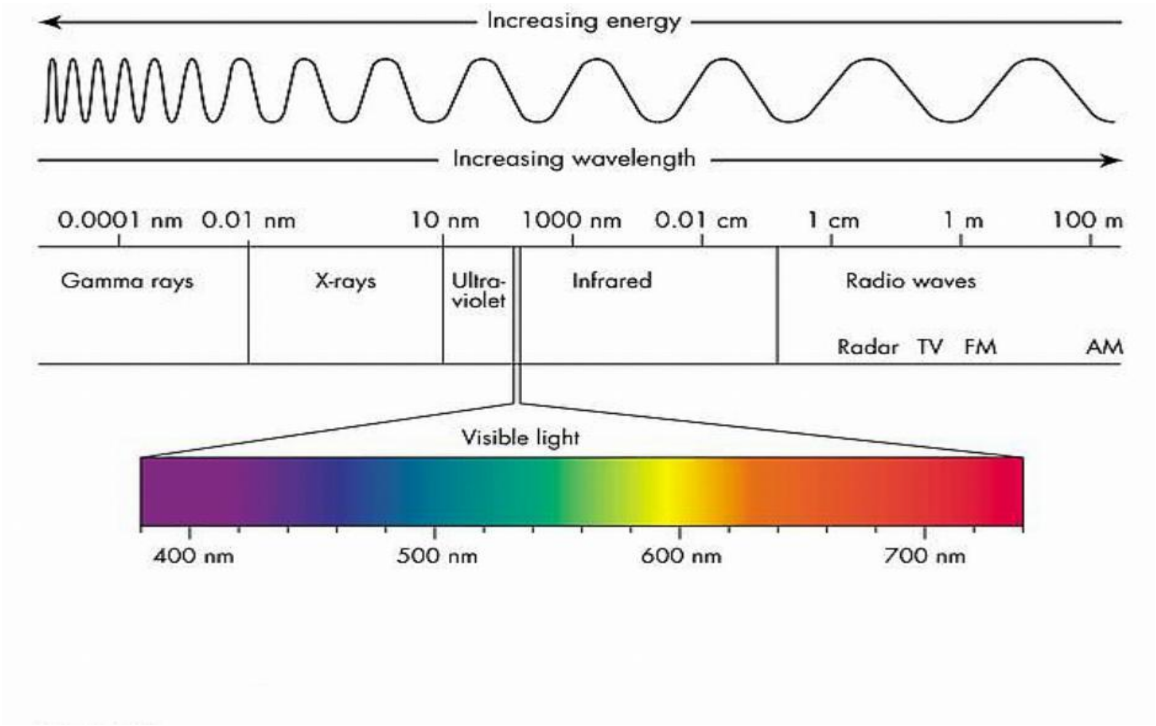


A lei (de Planck) e as estrelas

...

- A cor das estrelas

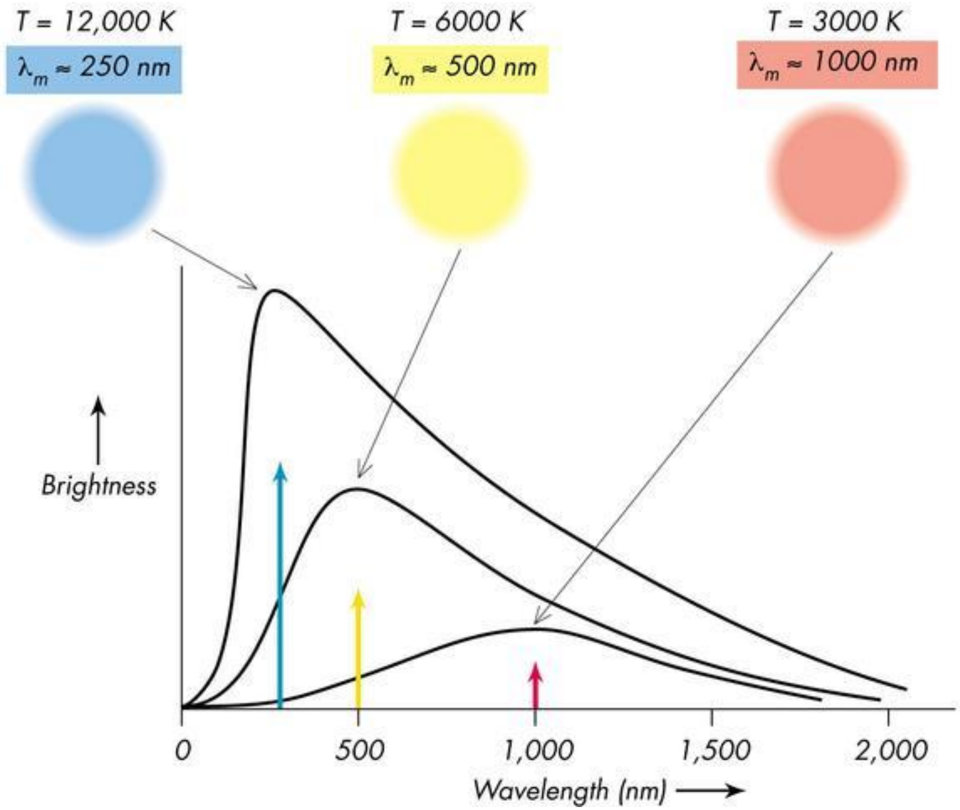
$$\lambda_{max} = \frac{hc}{4.965114kT} = \frac{2.898550 \times 10^{-6}(km\ K)}{T}$$



A lei (de Planck) e as estrelas ...

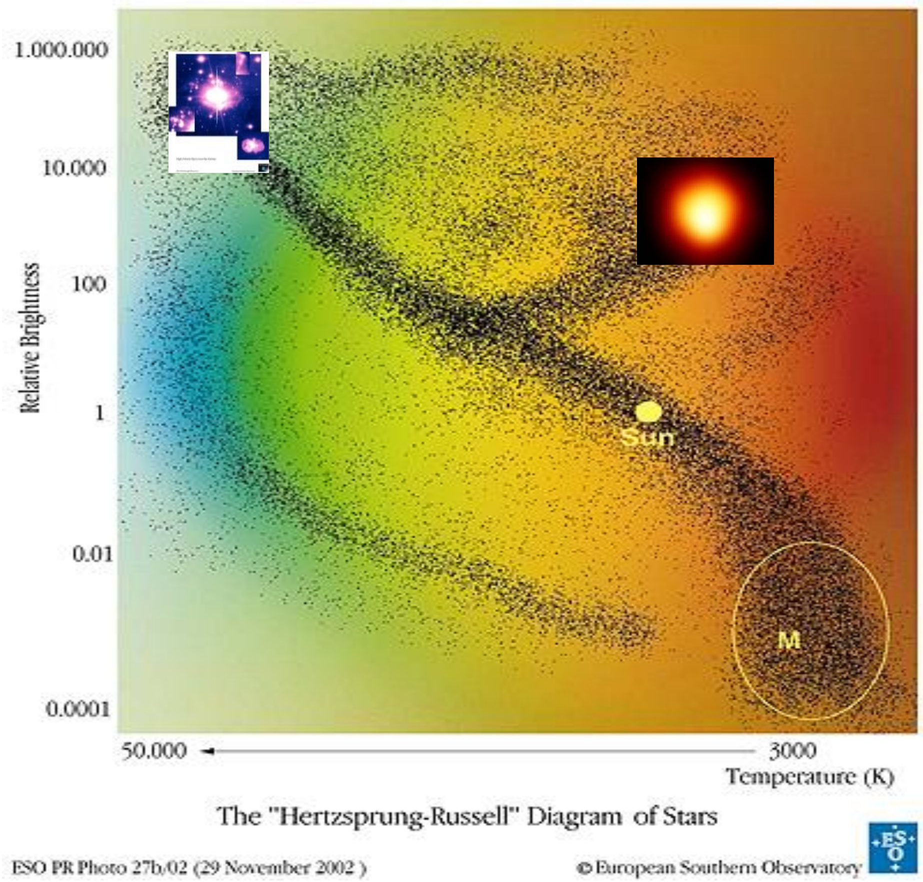
- A cor das estrelas

Lei do deslocamento de Wien



A lei (de Planck) e as estrelas ...

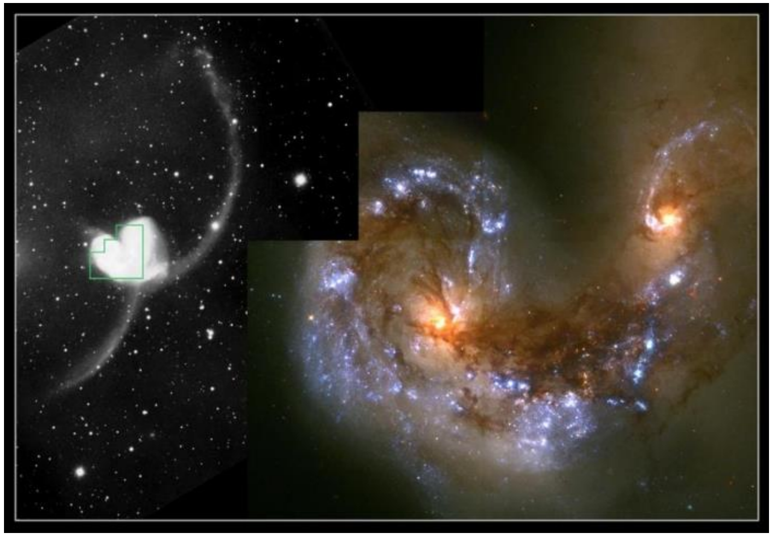
- Diagrama de Hertzsprung-Russel

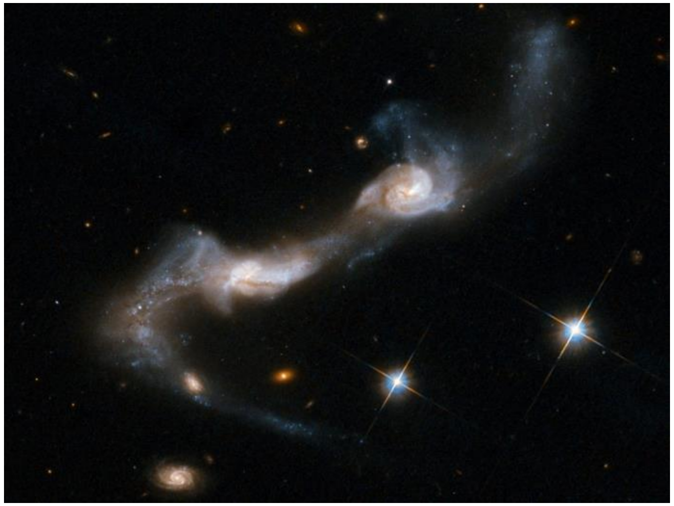


O que aprendemos …

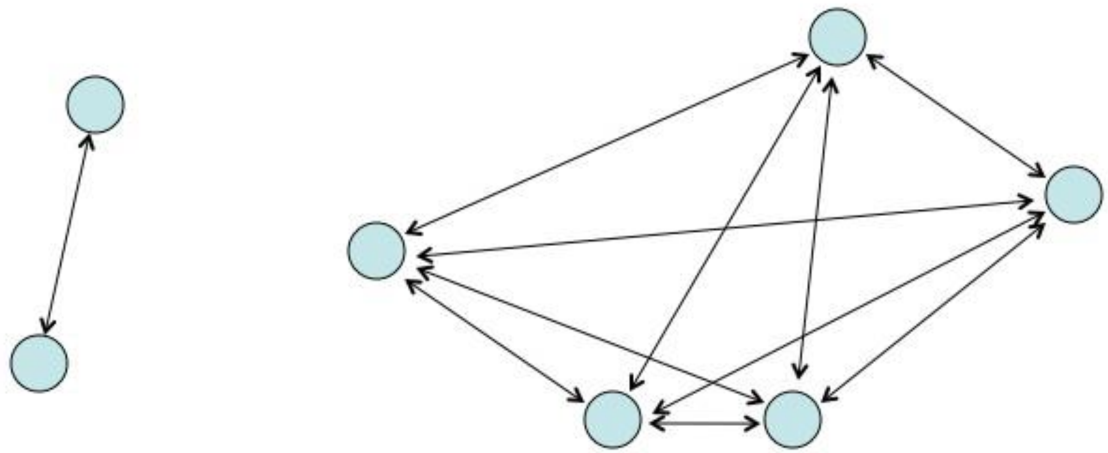
- Estrelas são … corpos negros
- Temperatura de uma estrela
- Fluxo total de energia emitida
- Cor da estrela (máximo de emissão)

- Interacção de Galáxias (observações)





@HST

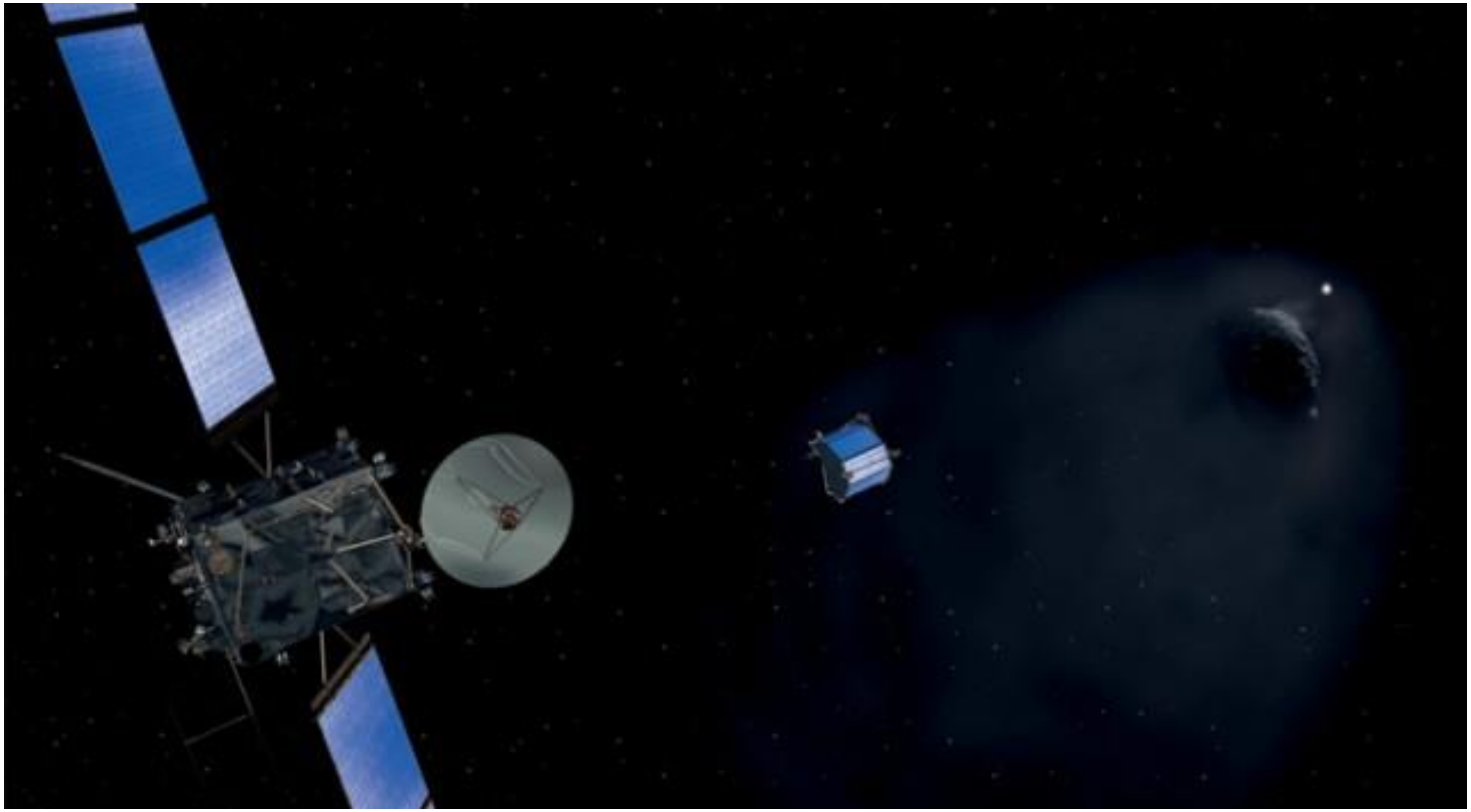


$$
\begin{aligned}
M_1\ddot{\vec{P_1}} &= -\frac{GM_1M_2}{|\vec{P_1}-\vec{P_2}|^3}\left(\vec{P_1}-\vec{P_2}\right)-\frac{GM_1M_3}{|\vec{P_1}-\vec{P_3}|^3}\left(\vec{P_1}-\vec{P_3}\right)\\
M_2\ddot{\vec{P_2}} &= -\frac{GM_2M_1}{|\vec{P_2}-\vec{P_1}|^3}\left(\vec{P_2}-\vec{P_1}\right)-\frac{GM_2M_3}{|\vec{P_2}-\vec{P_3}|^3}\left(\vec{P_2}-\vec{P_3}\right)\\
M_3\ddot{\vec{P_3}} &= -\frac{GM_3M_1}{|\vec{P_3}-\vec{P_1}|^3}\left(\vec{P_3}-\vec{P_1}\right)-\frac{GM_3M_2}{|\vec{P_3}-\vec{P_2}|^3}\left(\vec{P_3}-\vec{P_2}\right)
\end{aligned}
$$

@wiki

VIDEO @HST

A sonda espacial Rosetta



VIDEO